3 导数

湖南师大附中，数学教研组，张湘君

1.(2007.I.20) 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$.

（Ⅰ）证明：$f(x)$ 的导数 $f'(x)\geqslant 2$；

（Ⅱ）若对所有 $x\geqslant 0$ 都有 $f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围.

2.(2007.II.8) 已知曲线 $y=\dfrac{x^{2}}{4}-3\ln x$ 的一条切线的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，则切点的横坐标为(　　　)

A．3　　B．2　　C．1　　D．$\dfrac{1}{2}$

3.(2007.II.22) 已知函数 $f(x)=x^{3}-x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t,\ f(t))$ 处的切线方程；

（2）设 $a>0$，如果过点 $(a,\ b)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，证明：$-a<b<f(a)$.

4.(2008.I.7) 设曲线 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在点 $(3,2)$ 处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直，则 $a=$(　　　)

A．2　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．-2

5.(2008.I.19) 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ 内是减函数，求 a 的取值范围.

6.(2008.II.14) 设曲线 $y=e^{ax}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，则 $a=$________.

7.(2008.II.22) 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）如果对任何 $x\geqslant 0$，都有 $f(x)\leqslant ax$，求 a 的取值范围.

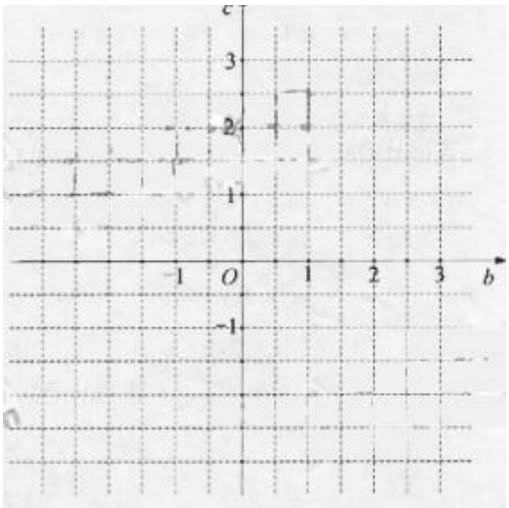
8.(2009.I.9) 已知直线 y=x+1 与曲线 $\mathrm{y}=\ln(x+a)$ 相切，则 α 的值为　　　　　　　　(　　　)

A. 1　　　　　B. 2　　　　　C. -1　　　　　D. -2

9.(2009.I.22) 设函数 $f\left(x\right)=x^3+3bx^2+3cx$ 在两个极值点 x_1、x_2，且 $x_1\in[-1,0], x_2\in[1,2]$.

(I) 求 b、c 满足的约束条件，并在下面的坐标平面内，画出满足这些条件的点 $\left(b,c\right)$ 的区域；

(II) 证明：$-10\le f\left(x_2\right)\le -\dfrac{1}{2}$.



10.(2009.II.4) 曲线 $y=\dfrac{x}{2x-1}$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处的切线方程为 ( )

A. $x-y-2=0$　　B. $x+y-2=0$　　C. $x+4y-5=0$　　D. $x-4y-5=0$

11.(2009.II.22) 设函数 $f\left(x\right)=x^2+aIn\left(1+x\right)$ 有两个极值点 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$

（I）求 a 的取值范围，并讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（II）证明： $f\left(x_2\right)>\dfrac{1-2In2}{4}$

12.(2010.I.22) 设函数 $f\left(x\right)=1-e^{-x}$.

（Ⅰ）证明：当 $x>-1$ 时， $f\left(x\right)\geq\dfrac{x}{x+1}$;

（Ⅱ）设当 $x\geq0$ 时， $f\left(x\right)\leq\dfrac{x}{ax+1}$ ，求 a 的取值范围.

13.(2011.I.9) 由曲线 $y=\sqrt{x}$ ，直线 $y=x-2$ 及 y 轴所围成的图形的面积为 ( )

A. $\dfrac{10}{3}$　　B. 4　　C. $\dfrac{16}{3}$　　D. 6

14.(2011.I.11) 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π ，且 $f(-x)=f(x)$ ，则 ( )

A. $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减　　B. $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 单调递减

C. $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增　　D. $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 单调递增

15.(2011.I.21) 已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x+1}+\dfrac{b}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$。

（Ⅰ）求 a、b 的值；

（Ⅱ）如果当 $x>0$，且 $x\neq 1$ 时，$f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{k}{x}$，求 k 的取值范围

16.(2011.II.8) 曲线 $y=e^{-2x}+1$ 在点(0,2)处的切线与直线 $y=0$ 和 $y=x$ 围成的三角形的面积为

( )

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 1

17.(2011.II.22) (I) 设函数 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{x+2}$，证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；

(II) 从编号 1 到 100 的 100 张卡片中每次随即抽取一张，然后放回，用这种方式连续抽取 20 次，设抽得的 20 个号码互不相同的概率为 p.证明：$p<(\dfrac{9}{10})^{19}<\dfrac{1}{e^2}$

18.(2012.I.12) 设点 P 在曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 最小值为( )

$(A)\ 1-\ln 2$　　$(B)\ \sqrt{2}(1-\ln 2)$　　$(C)\ 1+\ln 2$　　$(D)\ \sqrt{2}(1+\ln$

19.(2012.I.21) 已知函数 $f(x)$ 满足满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\dfrac{1}{2}x^2$；

（1）求 $f(x)$ 的解析式及单调区间；

（2）若 $f(x)\geq\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$，求 $(a+1)b$ 的最大值。

20.(2012.II.20) 设函数 $f(x)=ax+\cos x, x\in[0,\pi]$。

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $f(x)\le 1+\sin x$，求 a 的取值范围。

21.(2013.I.21) 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=e^x(cx+d)$，若曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都过点 P(0，2)，且在点 P 处有相同的切线 $y=4x+2$

（Ⅰ）求 a， b， c， d 的值；

（Ⅱ）若 $x\ge -2$ 时， $f(x)\le kg(x)$，求 k 的取值范围.

22.(2013.II.10) 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，下列结论中错误的是 (　　)

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$， $f(x_0)=0$

B. 函数 $y=f(x)$ 的图像是中心对称图形

C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减

D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$

23.(2013.II.21) 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$.

（Ⅰ）设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）当 $m\le 2$ 时，证明 $f(x)>0$.

24.(2014.I.11) 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$， 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围为 ( )

A.（2，+∞） *B*.（-∞，-2） *C*.（1，+∞） *D*.（-∞，-1）

25.(2014.I.21) 设函数 $f(x0=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点（1， $f(1)$ 处的切线为 $y=e(x-1)+2$.(Ⅰ)求 a,b； （Ⅱ）证明： $f(x)>1$.

26.(2014.II.8) 设曲线 y=*a*x-ln(x+1)在点(0,0)处的切线方程为 y=2x，则 *a*= ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

27.(2014.II.12) 设函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{m}$.若存在 $f\left(x\right)$ 的极值点 x_0 满足 $x_0{}^2+\left[f\left(x_0\right)\right]^2<m^2$，则 m 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\infty,-6\right)\cup\left(6,\infty\right)$ B. $\left(-\infty,-4\right)\cup\left(4,\infty\right)$ C. $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(2,\infty\right)$ D.$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(4,\infty\right)$

28.(2014.II.21) 已知函数 $f\left(x\right)=e^x-e^{-x}-2x$ zxxk

（Ⅰ）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性;

（Ⅱ）设 $g\left(x\right)=f\left(2x\right)-4bf\left(x\right)$，当 $x>0$ 时， $g\left(x\right)>0$,求 b 的最大值;

（III）已知 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，估计 ln2 的近似值（精确到 0.001）

29.(2015.I.12) 设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$,其中 $a<1$,若存在唯一的整数 x_0,使得 $f(x_0)<0$,则 a 的取值范围是 ( )

A. [-$\frac{3}{2e}$， 1） B. [-$\frac{3}{2e}$， $\frac{3}{4}$） C. [$\frac{3}{2e}$， $\frac{3}{4}$） D. [$\frac{3}{2e}$， 1）

30.(2015.I.21) 已知函数 f（x）$=x^3+ax+\dfrac{1}{4},g(x)=-\ln x$.

(Ⅰ)当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（Ⅱ）用 min $\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}(x>0)$，讨论 h（x）零点的个数.

31.(2015.II.21) 设函数 $f(x)=e^{mx}+x^2-mx$.

(Ⅰ) 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

（Ⅱ）若对于任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le e-1$，求 m 的取值范围.

3 导数

湖南师大附中，数学教研组，张湘君

1.(2007.I.20) 设函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$.

（Ⅰ）证明：$f(x)$ 的导数 $f'(x)\geqslant 2$；

（Ⅱ）若对所有 $x\geqslant 0$ 都有 $f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围.

分析：（Ⅰ）$f(x)$ 的导数 $f'(x)=e^x+e^{-x}$．由于 $e^x+e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$，故 $f'(x)\geqslant 2$.（当且仅当 $x=0$ 时，等号成立）．

（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)-ax$，则 $g'(x)=f'(x)-a=e^x+e^{-x}-a$，

（ⅰ）若 $a\leqslant 2$，当 $x>0$ 时，$g'(x)=e^x+e^{-x}-a>2-a\geqslant 0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以，$x\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant g(0)$，即 $f(x)\geqslant ax$.

（ⅱ）若 $a>2$，方程 $g'(x)=0$ 的正根为 $x_1=\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

此时，若 $x\in(0,\ x_1)$，则 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在该区间为减函数.

所以，$x\in(0,\ x_1)$ 时，$g(x)<g(0)=0$，即 $f(x)<ax$，与题设 $f(x)\geqslant ax$ 相矛盾.

综上，满足条件的 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

2.(2007.II.8) 已知曲线 $y=\dfrac{x^2}{4}-3\ln x$ 的一条切线的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，则切点的横坐标为(　　　)

A．3　　　　B．2　　　　C．1　　　　D．$\dfrac{1}{2}$

分析：A.

3.(2007.II.22) 已知函数 $f(x)=x^3-x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t,\ f(t))$ 处的切线方程；

（2）设 $a>0$，如果过点 $(a,\ b)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，证明：$-a<b<f(a)$.

分析：（1）求函数 $f(x)$ 的导数；$f'(x)=3x^2-1$．曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t,\ f(t))$ 处的切线方程为：$y-f(t)=f'(t)(x-t)$，即　$y=(3t^2-1)x-2t^3$.

（2）如果有一条切线过点$(a,\ b)$，则存在t，使$b=(3t^2-1)a-2t^3$.

于是，若过点$(a,\ b)$可作曲线$y=f(x)$的三条切线，则方程$2t^3-3at^2+a+b=0$

有三个相异的实数根．记　$g(t)=2t^3-3at^2+a+b$，则　$g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$.

当t变化时，$g(t)$，$g'(t)$变化情况如下表：

t	$(-\infty,0)$	0	$(0,\ a)$	a	$(a,+\infty)$
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	极大值 $a+b$	↘	极小值 $b-f(a)$	↗

由$g(t)$的单调性，当极大值$a+b<0$或极小值$b-f(a)>0$时，方程$g(t)=0$最多有一个实数根；

当$a+b=0$时，解方程$g(t)=0$得$t=0,\ t=\dfrac{3a}{2}$，即方程$g(t)=0$只有两个相异的实数根；

当$b-f(a)=0$时，解方程$g(t)=0$得$t=-\dfrac{a}{2},\ t=a$，即方程$g(t)=0$只有两个相异的实数根．

综上，如果过$(a,\ b)$可作曲线$y=f(x)$三条切线，即$g(t)=0$有三个相异的实数根，则

$\begin{cases}a+b>0,\\ b-f(a)<0.\end{cases}$ 即 $-a<b<f(a)$.

4.(2008.I.7) 设曲线$y=\dfrac{x+1}{x-1}$在点$(3,2)$处的切线与直线$ax+y+1=0$垂直，则$a=($　　　$)$

A．2　　　　B．$\dfrac{1}{2}$　　　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　　　D．-2

分析：D.　　由$y=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1},y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2},y'|_{x=3}=-\dfrac{1}{2},-a=2,a=-2$.

5.(2008.I.19) 已知函数$f(x)=x^3+ax^2+x+1$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）讨论函数$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）设函数$f(x)$在区间$\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$内是减函数，求$a$的取值范围.

分析：（1）$f(x)=x^3+ax^2+x+1$求导：$f'(x)=3x^2+2ax+1$

当$a^2\leqslant 3$时，$\Delta\leqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$在$\mathbf{R}$上递增

当 $a^2>3$， $f'(x)=0$ 求得两根为 $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-3}}{3}$，

即 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3}\right)$ 递增， $\left(\dfrac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3},\dfrac{-a+\sqrt{a^2-3}}{3}\right)$ 递减，

$\left(\dfrac{-a+\sqrt{a^2-3}}{3},+\infty\right)$ 递增

（2） $\begin{cases}\dfrac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3}\leqslant-\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{-a+\sqrt{a^2-3}}{3}\geqslant-\dfrac{1}{3}\end{cases}$，且 $a^2>3$ 解得： $a\geqslant\dfrac{7}{4}$

6.(2008.II.14) 设曲线 $y=e^{ax}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，则 $a=$________.

分析：**2**

【解析】 $y'=ae^{ax}$， $\therefore$ 切线的斜率 $k=y'|_{x=0}=a$， 所以由 $a\cdot(-\dfrac{1}{2})=-1$ 得 $a=2$

7.(2008.II.22) 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）如果对任何 $x\geqslant0$，都有 $f(x)\leqslant ax$，求 a 的取值范围.

分析：（Ⅰ） $f'(x)=\dfrac{(2+\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$.　　　2 分

当 $2k\pi-\dfrac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$（$k\in\mathbf{Z}$）时， $\cos x>-\dfrac{1}{2}$， 即 $f'(x)>0$；

当 $2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}$（$k\in\mathbf{Z}$）时， $\cos x<-\dfrac{1}{2}$， 即 $f'(x)<0$.

因此 $f(x)$ 在每一个区间 $\left(2k\pi-\dfrac{2\pi}{3},2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）是增函数，

$f(x)$ 在每一个区间 $\left(2k\pi+\dfrac{2\pi}{3},2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）是减函数.　………………6 分

（Ⅱ）令 $g(x)=ax-f(x)$， 则 $g'(x)=a-\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=a-\dfrac{2}{2+\cos x}+\dfrac{3}{(2+\cos x)^2}$

$=3\left(\dfrac{1}{2+\cos x}-\dfrac{1}{3}\right)^2+a-\dfrac{1}{3}$. 故当 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时， $g'(x)\geqslant0$.

又 $g(0)=0$，所以当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $f(x)\leqslant ax$． ……………9 分

当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时，令 $h(x)=\sin x-3ax$，则 $h'(x)=\cos x-3a$．

故当 $x\in\left[0,\arccos 3a\right)$ 时，$h'(x)>0$．因此 $h(x)$ 在 $\left[0,\arccos 3a\right)$ 上单调增加．

故当 $x\in(0,\arccos 3a)$ 时，$h(x)>h(0)=0$，即 $\sin x>3ax$．

于是，当 $x\in(0,\arccos 3a)$ 时，$f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}>\dfrac{\sin x}{3}>ax$．

当 $a\leqslant 0$ 时，有 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}>0\geqslant a\bullet\dfrac{\pi}{2}$．

因此，a 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$． 12 分

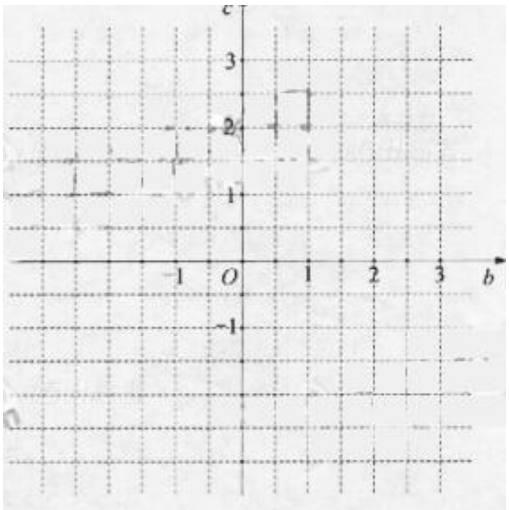
8.(2009.I.9) 已知直线 y=x+1 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切，则 α 的值为 ( )

A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

分析：B. 设切点 $P(x_0,y_0)$，则 $y_0=x_0+1, y_0=\ln(x_0+a)$，又 $\because y'|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0+a}=1$

$\therefore x_0+a=1 \therefore y_0=0, x_0=-1 \therefore a=2$．

9.(2009.I.22) 设函数 $f(x)=x^3+3bx^2+3cx$ 在两个极值点 x_1、x_2，且 $x_1\in[-1,0], x_2\in[1,2]$.



(I) 求 b、c 满足的约束条件，并在下面的坐标平面内，画出满足这些条件的点 (b,c) 的区域；

(II) 证明：$-10\le f(x_2)\le -\frac{1}{2}$.

分析：（I）这一问主要考查了二次函数根的分布及线性规划作可行域的能力。大部分考生有思路并能够得分。$f'(x)=3x^2+6bx+3c$ 由题意知方程 $f'(x)=0$ 有两个根 x_1、x_2

且 $x_1\in[-1,0]$, $x_2\in[1,2]$. 则有 $f'(-1)\ge 0$, $f'(0)\le 0$, $f'(1)\le 0$, $f'(2)\ge 0$ 故有

$$\begin{cases} 2b-c-1\le 0 \\ c\le 0 \\ 2b+c+1\le 0 \\ 4b+c+4\ge 0 \end{cases}$$

右图中阴影部分即是满足这些条件的点(b,c)的区域。

(II)这一问考生不易得分，有一定的区分度。主要原因是含字母较多，不易找到突破口。此题主要利用消元的手段，消去目标 $f(x_2)=x_2^3+3bx_2^2+3cx_2$ 中的b，（如果消 c会较繁琐）再利用x_2的范围，并借助（I）中的约束条件得$c\in[-2,0]$进而求解，有较强的技巧性。

解： 由题意有 $f'(x_2)=3x_2^2+6bx_2+3c=0$ . . . . ①

又 $f(x_2)=x_2^3+3bx_2^2+3cx_2$ . . . . ②

消去b可得 $f(x_2)=-\frac{1}{2}x_2^3+\frac{3c}{2}x_2$.

又$\because x_2\in[1,2]$，且$c\in[-2,0]$ $\quad\therefore -10\le f(x_2)\le -\frac{1}{2}$

10.(2009.II.4) 曲线 $y=\frac{x}{2x-1}$ 在点$(1,1)$处的切线方程为 ( )

A. $x-y-2=0$ B. $x+y-2=0$ C. $x+4y-5=0$ D. $x-4y-5=0$

分析：$y'|_{x=1}=\frac{2x-1-2x}{(2x-1)^2}|_{x=1}=[-\frac{1}{(2x-1)^2}]|_{x=1}=-1$,

故切线方程为$y-1=-(x-1)$,即$x+y-2=0$ **故选 B.**

11.(2009.II.22) 设函数 $f(x)=x^2+aIn(1+x)$有两个极值点x_1、x_2，且$x_1<x_2$

（I）求a的取值范围，并讨论$f(x)$的单调性；

（II）证明：$f(x_2)>\frac{1-2In2}{4}$

分析：（I） $f'(x)=2x+\frac{a}{1+x}=\frac{2x^2+2x+a}{1+x}(x>-1)$

令$g(x)=2x^2+2x+a$，其对称轴为$x=-\frac{1}{2}$。由题意知x_1、x_2是方程$g(x)=0$的两个均大于-1的不相等的实根，其充要条件为$\begin{cases}\Delta=4-8a>0\\ g(-1)=a>0\end{cases}$，得$0<a<\frac{1}{2}$

(1)当$x\in(-1,x_1)$时， $f'(x)>0,\therefore f(x)$在$(-1,x_1)$内为增函数；

(2)当$x\in(x_1,x_2)$时， $f'(x)<0,\therefore f(x)$在(x_1,x_2)内为减函数；

(3)当$x\in(x_2,+\infty)$时， $f'(x)>0,\therefore f(x)$在$(x_2,+\infty)$内为增函数；

（II）由（I） $g(0)=a>0,\therefore -\frac{1}{2}<x_2<0$， $a=-(2x^2{}_2+2x_2)$

$\therefore f(x_2)=x_2{}^2+a\ln(1+x_2)=x_2{}^2-(2x^2{}_2+2x_2)\ln(1+x_2)$

设 $h(x)=x^2-(2x^2+2x)\ln(1+x)(x>-\frac{1}{2})$，

则 $h'(x)=2x-2(2x+1)\ln(1+x)-2x=-2(2x+1)\ln(1+x)$

(1)当 $x\in(-\frac{1}{2},0)$ 时， $h'(x)>0,\therefore h(x)$ 在 $[-\frac{1}{2},0)$ 单调递增；

(2)当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $h'(x)<0$， $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减。

$\therefore$ 当$x\in(-\frac{1}{2},0)$时,$h(x)>h(-\frac{1}{2})=\frac{1-2\ln 2}{4}$

故 $f(x_2)=h(x_2)>\frac{1-2In2}{4}$．

12.(2010.I.22) 设函数 $f(x)=1-e^{-x}$.

（Ⅰ）证明：当 x>−1时， $f(x)\geq\frac{x}{x+1}$；

（Ⅱ）设当 $x\geq 0$ 时， $f(x)\leq\frac{x}{ax+1}$， 求 a 的取值范围.

分析：【命题意图】本题主要考查导数的应用和利用导数证明不等式，考查考生综合运用知识的能力及分类讨论的思想，考查考生的计算能力及分析问题、解决问题的能力.

【参考答案】

（Ⅰ）当 $x>-1$ 时， $f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}$ 当且仅当 $e^x\geqslant 1+x$.

令 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1$. ……

当 $x\geqslant 0$ 时 $g'(x)\geqslant 0$， $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是增函数；

当 $x\leqslant 0$ 时 $g'(x)\leqslant 0$， $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 是减函数.

于是 $g(x)$ 在 $x=0$ 处达到最小值，因而当 $x\in\mathbf{R}$ 时， $g(x)\geqslant g(0)$，即 $e^x\geqslant 1+x$,

所以当 $x>-1$ 时， $f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}$. ……

(Ⅱ）由题设 $x\geqslant 0$，此时 $f(x)\geqslant 0$.

当 $a<0$ 时，若 $x>-\frac{1}{a}$，则 $\frac{x}{ax+1}<0$，$f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$ 不成立；

当 $a\geqslant 0$ 时，令 $h(x)=axf(x)+f(x)-x$，则

$$f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1} \text{ 当且仅当 } h(x)\leqslant 0.$$

$$\begin{aligned} h'(x)&=af(x)+axf'(x)+f'(x)-1\\ &=af(x)-axf(x)+ax-f(x). \end{aligned}$$

（ⅰ）当 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由(Ⅰ)知 $x\leqslant(x+1)f(x)$，

$$\begin{aligned} h'(x)&\leqslant af(x)-axf(x)+a(x+1)f(x)-f(x),\\ &=(2a-1)f(x)\leqslant 0, \end{aligned}$$

$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是减函数，$h(x)\leqslant h(0)=0$，即 $f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$.

（ⅱ）当 $a>\frac{1}{2}$ 时，由（ⅰ）知 $x\geqslant f(x)$，

$$\begin{aligned} h'(x)&=af(x)-axf(x)+ax-f(x)\\ &\geqslant af(x)-axf(x)+af(x)-f(x)\\ &=(2a-1-ax)f(x), \end{aligned}$$

当 $0<x<\frac{2a-1}{a}$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)>h(0)=0$，即 $f(x)>\frac{x}{ax+1}$.

综上，a 的取值范围是 $[0,\frac{1}{2}]$.

【点评】导数常作为高考的压轴题，对考生的能力要求非常高，它不仅要求考生牢固掌握基础知识、基本技能，还要求考生具有较强的分析能力和计算能力.估计以后对导数的考查力度不会减弱。作为压轴题，主要是涉及利用导数求最值解决恒成立问题，利用导数证明不等式等，常伴随对参数的讨论，这也是难点之所在.

13.(2011.I.9) 由曲线 $y=\sqrt{x}$，直线 $y=x-2$ 及 y 轴所围成的图形的面积为　　(　　　)

A. $\frac{10}{3}$　　　　B. 4　　　　C. $\frac{16}{3}$　　　　D. 6

分析：用定积分求解 $s=\int_0^4(\sqrt{x}-x+2)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+2x)|_0^4=\frac{16}{3}$，选 C.

14.(2011.I.11) 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，且 $f(-x)=f(x)$，则 (　　)

A. $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减

B. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ 单调递减

C. $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增

D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ 单调递增

分析：$f(x)=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi+\frac{\pi}{4})$，所以 $\omega=2$，又 f(x)为偶函数，

$\therefore \varphi+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in z$，$\therefore f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}\cos 2x$，选 A

15.(2011.I.21) 已知函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x+1}+\frac{b}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$。

（Ⅰ）求 a、b 的值；

（Ⅱ）如果当 $x>0$，且 $x\neq 1$ 时，$f(x)>\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$，求 k 的取值范围

分析：（Ⅰ）$f'(x)=\frac{\alpha(\frac{x+1}{x}-\ln x)}{(x+1)^2}-\frac{b}{x^2}$，由于直线 $x+2y-3=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，且过点 $(1,1)$，

故 $\begin{cases} f(1)=1, \\ f'(1)=-\frac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b=1, \\ \frac{a}{2}-b=-\frac{1}{2}, \end{cases}$ 　　解得 $a=1$，$b=1$。

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x}$，所以 $f(x)-(\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x})=\frac{1}{1-x^2}(2\ln x+\frac{(k-1)(x^2-1)}{x})$。

考虑函数 $h(x)=2\ln x+\frac{(k-1)(x^2-1)}{x}$ $(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{(k-1)(x^2+1)+2x}{x^2}$。

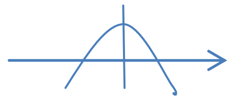
(i)设 $k\le 0$，由 $h'(x)=\frac{k(x^2+1)-(x-1)^2}{x^2}$ 知，当 $x\neq 1$ 时，$h'(x)<0$，h(x)递减。而 $h(1)=0$ 故当 $x\in(0,1)$ 时，　$h(x)>0$，可得 $\frac{1}{1-x^2}h(x)>0$；

当 x∈（1，+∞）时，h（x）<0，可得 $\frac{1}{1-x^2}$ h（x）>0

从而当 x>0,且 x≠1 时，f（x）-（$\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$）>0，即 f（x）>$\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$.

（ii）设 0<k<1.由于 $(k-1)(x^2+1)+2x=(k-1)x^2+2x+k-1$的图像开口向下，且

$\Delta=4-4(k-1)^2>0$，对称轴 x=$\dfrac{1}{1-k}>1$ 当 x∈（1，$\dfrac{1}{1-k}$）时，（k-1）（x^2+1）+2x>0,故 h'（x）>0,

而 h（1）=0，故当 x∈（1，$\dfrac{1}{1-k}$）时，h（x）>0，可得$\dfrac{1}{1-x^2}$h（x）<0,与 

题设矛盾。

（iii）设 k≥1.此时 $x^2+1\geq 2x$，$(k-1)(x^2+1)+2x>0\Rightarrow h'$（x）>0,而 h（1）=0，故当 x∈（1，+∞）时，h（x）>0，可得$\dfrac{1}{1-x^2}$ h（x）<0,与题设矛盾。

综合得，k 的取值范围为（-∞，0]

点评; 求参数的范围一般用离参法，然后用导数求出最值进行求解。若求导后不易得到极值点，可二次求导，还不行时，就要使用参数讨论法了。即以参数为分类标准，看是否符合题意。求的答案。此题用的便是后者。

16.(2011.II.8) 曲线 $y=e^{-2x}+1$在点(0,2)处的切线与直线 $y=0$和 $y=x$围成的三角形的面积为 ( )

A. $\dfrac{1}{3}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{2}{3}$ D. 1

分析：A

【命题意图】本题主要考查利用导数求切线方程和三角形面积公式.

【解析】 $y'=-2e^{-2x}$, ∴曲线 $y=e^{-2x}+1$在点(0,2)处的切线的斜率 $k=-2$, 故切线方程是 $y=-2x+2$,在直角坐标系中作出示意图得围成的三角形的三个顶点分别为(0,0)、(1,0)、($\dfrac{2}{3}$,$\dfrac{2}{3}$)，∴三角形的面积是 $S=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

17.(2011.II.22) (I) 设函数 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{x+2}$，证明：当 $x>0$时，$f(x)>0$；

(II) 从编号 1 到 100 的 100 张卡片中每次随即抽取一张，然后放回，用这种方式连续抽取 20 次，设抽得的 20 个号码互不相同的概率为 p.证明：$p<(\dfrac{9}{10})^{19}<\dfrac{1}{e^2}$

分析：【命题意图】本题为导数、概率与不等式的综合,主要考查导数的应用和利用导数证明不等式.考查考生综合运用知识的能力及分类讨论的思想，考查考生的计算能力及分析问题、解决问题的能力.

【解析】(I) $f'(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$ …………………………2 分

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 为增函数,又 $f(0)=0$,因此当 $x>0$ 时, $f(x)>0$. ……5 分

(II) $p=\dfrac{100\times 99\times 98\times\cdots\times 81}{100^{20}}$. 又 $99\times 81<90^2, 98\times 82<90^2, \cdots 91\times 89<90^2$，所以 $p<(\dfrac{9}{10})^{19}$.

由(I)知: 当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\dfrac{2x}{x+2}$ 因此 $(1+\dfrac{2}{x})\ln(1+x)>2$.

在上式中,令 $x=\dfrac{1}{9}$,则 $19\ln\dfrac{10}{9}>2$,即 $(\dfrac{10}{9})^{19}>e^2$.所以 $p<(\dfrac{9}{10})^{19}<\dfrac{1}{e^2}$ …………12 分

【点评】导数常作为高考的压轴题，对考生的能力要求非常高，它不仅要求考生牢固掌握基础知识、基本技能，还要求考生具有较强的分析能力和计算能力.估计以后对导数的考查力度不会减弱.作为压轴题，主要是涉及利用导数求最值解决恒成立问题，利用导数证明不等式等，有时还伴随对参数的讨论，这也是难点之所在.

18.(2012.I.12) 设点 P 在曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 最小值为( )

(A) $1-\ln 2$ (B) $\sqrt{2}(1-\ln 2)$ (C) $1+\ln 2$ (D) $\sqrt{2}(1+\ln 2)$

分析：选 A

函数 $y=\dfrac{1}{2}e^x$ 与函数 $y=\ln(2x)$ 互为反函数，图象关于 $y=x$ 对称

函数 $y=\dfrac{1}{2}e^x$ 上的点 $P(x,\dfrac{1}{2}e^x)$ 到直线 $y=x$ 的距离为 $d=\dfrac{\left|\frac{1}{2}e^x-x\right|}{\sqrt{2}}$

设函数 $g(x)=\dfrac{1}{2}e^x-x\Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{2}e^x-1\Rightarrow g(x)_{\min}=1-\ln 2\Rightarrow d_{\min}=\dfrac{1-\ln 2}{\sqrt{2}}$

由图象关于 $y=x$ 对称得：$|PQ|$ 最小值为 $2d_{\min}=\sqrt{2}(1-\ln 2)$

19.(2012.I.21) 已知函数 $f(x)$ 满足满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\dfrac{1}{2}x^2$；

（1）求 $f(x)$ 的解析式及单调区间；

（2）若 $f(x)\ge\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$，求 $(a+1)b$ 的最大值。

分析：（1） $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\dfrac{1}{2}x^2\Rightarrow f'(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)+x$

令 $x=1$ 得：$f(0)=1$，$f(x)=f'(1)e^{x-1}-x+\dfrac{1}{2}x^2\Rightarrow f(0)=f'(1)e^{-1}=1\Leftrightarrow f'(1)=e$

得：$f(x)=e^x-x+\dfrac{1}{2}x^2\Rightarrow g(x)=f'(x)=e^x-1+x$

$g'(x)=e^x+1>0\Rightarrow y=g(x)$ 在 $x\in R$ 上单调递增

$f'(x)>0=f'(0)\Leftrightarrow x>0, f'(x)<0=f'(0)\Leftrightarrow x<0$ 得： $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$

且单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$

（2） $f(x)\ge\frac{1}{2}x^2+ax+b\Leftrightarrow h(x)=e^x-(a+1)x-b\ge 0$ 得 $h'(x)=e^x-(a+1)$

①当 $a+1<0$ 时， $h'(x)>0\Rightarrow y=h(x)$ 在 $x\in R$ 上单调递增

$x\to -\infty$ 时， $h(x)\to-\infty$ 与 $h(x)\ge 0$ 矛盾

②当 $a+1=0$ 时， $b\le e^x\Rightarrow b\le 0$

③当 $a+1>0$ 时， $h'(x)>0\Leftrightarrow x>\ln(a+1), h'(x)<0\Leftrightarrow x<\ln(a+1)$

得：当 $x=\ln(a+1)$ 时， $h(x)_{\min}=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\ge 0$

$(a+1)b\le(a+1)^2-(a+1)^2\ln(a+1)(a+1>0)$ 令 $F(x)=x^2-x^2\ln x(x>0)$；则 $F'(x)=x(1-2\ln x)$

$F'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\sqrt{e}, F'(x)<0\Leftrightarrow x>\sqrt{e}$

当 $x=\sqrt{e}$ 时， $F(x)_{\max}=\frac{e}{2}$；当 $a=\sqrt{e}-1, b=\sqrt{e}$ 时， $(a+1)b$ 的最大值为

20.(2012.II.20) 设函数 $f(x)=ax+\cos x, x\in[0,\pi]$。

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $f(x)\le 1+\sin x$，求 a 的取值范围。

分析：【命题意图】本试题考查了导数在研究函数中的运用。第一就是函数中有三角函数，要利用三角函数的有界性，求解单调区间。另外就是运用导数证明不等式问题的构造函数思想的运用。

解： $f'(x)=a-\sin x$。

（Ⅰ）因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $0\le\sin x\le 1$。

当 $a\ge 1$ 时， $f'(x)\ge 0$， $f(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上为单调递增函数；

当 $a\le 0$ 时， $f'(x)\le 0$， $f(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上为单调递减函数；

当 $0<a<1$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $\sin x=a$，

由 $f'(x)>0$ 得 $0\le x<\arcsin a$ 或 $\pi-\arcsin a<x\le\pi$；

由 $f'(x)<0$ 得 $\arcsin a<x<\pi-\arcsin a$。

所以当 $0<a<1$ 时 $f(x)$ 在 $[0,\arcsin a]$ 和 $[\pi-\arcsin a,\pi]$ 上为为单调递增函数；在 $[\arcsin a,\pi-\arcsin a]$ 上为单调递减函数。

（Ⅱ）因为 $f(x)\le 1+\sin x \Leftrightarrow ax+\cos x\le 1+\sin x \Leftrightarrow ax\le 1+\sin x-\cos x$

当 $x=0$ 时， $0\le 1+\sin 0-\cos 0=0$ 恒成立

当 $0<x\le\pi$ 时， $ax\le 1+\sin x-\cos x \Leftrightarrow a\le\dfrac{1+\sin x-\cos x}{x} \Leftrightarrow a\le[\dfrac{1+\sin x-\cos x}{x}]_{\min}$

令 $g(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{x}(0<x\le\pi)$， 则

$$g'(x)=\frac{(\cos x+\sin x)x-1-\sin x+\cos x}{x^2}=\frac{(1+x)\cos x+(x-1)\sin x-1}{x^2}$$

又令 $c(x)=(1+x)\cos x+(x-1)\sin x-1$， 则

$c'(x)=\cos x-(1+x)\sin x+\sin x+(x-1)\cos x=-x(\sin x+\cos x)$

则当 $x\in(0,\dfrac{3\pi}{4})$ 时， $\sin x+\cos x>0$， 故 $c'(x)<0$， $c(x)$ 单调递减

当 $x\in(\dfrac{3\pi}{4},\pi]$ 时， $\sin x+\cos x<0$， 故 $c'(x)\ge 0$， $c(x)$ 单调递增

所以 $c(x)$ 在 $x\in(0,\pi]$ 时有最小值 $c(\dfrac{3\pi}{4})=-\sqrt{2}-1$， 而

$\lim\limits_{x\to 0^+}c(x)=(1+0)\cos 0+(0-1)\sin 0-1=0$， $\lim\limits_{x\to\pi^-}c(x)=c(\pi)=-(1+\pi)-1<0$

综上可知 $x\in(0,\pi]$ 时， $c(x)<0\Rightarrow g'(x)<0$， 故 $g(x)$ 在区间 $(0,\pi]$ 单调递

所以 $[g(x)]_{\min}=g(\pi)=\dfrac{2}{\pi}$， 故所求 a 的取值范围为 $a\le\dfrac{2}{\pi}$。

另解：由 $f(x)\le 1+\sin x$ 恒成立可得 $f(\pi)\le 1\Leftrightarrow a\pi-1\le 1\Leftrightarrow a\le\dfrac{2}{\pi}$

令 $g(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x(0\le x\le\dfrac{\pi}{2})$， 则 $g'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$

当 $x\in(0,\arcsin\dfrac{2}{\pi})$ 时， $g'(x)>0$， 当 $x\in(\arcsin\dfrac{2}{\pi},\dfrac{\pi}{2})$ 时， $g'(x)<0$

又 $g(0)=g(\dfrac{\pi}{2})=0$， 所以 $g(x)\ge 0$， 即 $\dfrac{2}{\pi}x\le\sin x(0\le x\le\dfrac{\pi}{2})$ 故当 $a\le\dfrac{2}{\pi}$ 时，有 $f(x)\le\dfrac{2}{\pi}x+\cos x$

①当 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 时， $\dfrac{2}{\pi}x\le\sin x$， $\cos x\le 1$， 所以 $f(x)\le 1+\sin x$

②当 $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi$ 时， $f(x)\le\dfrac{2}{\pi}x+\cos x=1+\dfrac{2}{\pi}(x-\dfrac{\pi}{2})-\sin(x-\dfrac{\pi}{2})\le 1+\sin x$

综上可知故所求 a 的取值范围为 $a\le\dfrac{2}{\pi}$。

【点评】试题分为两问，题词面比较简单，给出的函数比较新颖，因为里面还有三角函数，这一点对于同学们来说有点难度，不同于平时的练习题，相对来说做得比较少。但是解决的关键还是要看导数的符号，求解单调区间。第二问中，运用构造函数的思想，证明不等式，一直以来是个难点，那么这类问题的关键是找到合适的函数，运用导数证明最值大于或者小于零的问题得到解决。

21.(2013.I.21) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$，$g(x) = e^x(cx + d)$，若曲线 $y = f(x)$ 和曲线 $y = g(x)$ 都过点 P(0，2)，且在点 P 处有相同的切线 $y = 4x + 2$

（Ⅰ）求 a， b， c， d 的值；

（Ⅱ）若 x≥－2 时， $f(x) \le kg(x)$，求 k 的取值范围.

分析：（Ⅰ）由已知得 $f(0)=2, g(0)=2, f'(0)=4, g'(0)=4$，

而 $f'(x)=2x+b$， $g'(x)=e^x(cx+d+c)$，∴ a=4， b=2， c=2， d=2；……4 分[来源:Zxxk.Com]

（Ⅱ）由（Ⅰ）知， $f(x)=x^2+4x+2$， $g(x)=2e^x(x+1)$，

设函数 $F(x)=kg(x)-f(x)=2ke^x(x+1)-x^2-4x-2$（$x \ge -2$），

$F'(x)=2ke^x(x+2)-2x-4=2(x+2)(ke^x-1)$，有题设可得 $F(0)$≥0，即 $k \ge 1$，

令 $F'(x)$=0 得， $x_1=-\ln k$， x_2=－2，

（1）若 $1 \le k < e^2$，则－2＜ x_1≤0，∴当 $x \in (-2, x_1)$ 时， $F(x)$＜0，当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时， $F(x)$＞0，即 $F(x)$ 在 $(-2, x_1)$ 单调递减，在 $(x_1, +\infty)$ 单调递增，故 $F(x)$ 在 $x = x_1$ 取最小值 $F(x_1)$，而

$F(x_1)=2x_1+2-x_1^2-4x_1-2=-x_1(x_1+2)$≥0，∴当 x≥－2 时， $F(x)$≥0，即 $f(x) \le kg(x)$ 恒成立，

(2)若 $k=e^2$，则 $F'(x)=2e^2(x+2)(e^x-e^2)$，

∴当 x≥－2 时， $F'(x)$≥0，∴ $F(x)$ 在(－2,+∞)单调递增，而 $F(-2)$=0，

∴当 x≥－2 时， $F(x)$≥0，即 $f(x) \le kg(x)$ 恒成立，

(3)若 $k > e^2$，则 $F(-2)=-2ke^{-2}+2=-2e^{-2}(k-e^2)$＜0，

∴当 x≥－2 时， $f(x) \le kg(x)$ 不可能恒成立，

综上所述， k 的取值范围为$[1, e^2]$.

22.(2013.II.10) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$，下列结论中错误的是　　　(　　　)

A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}$， $f(x_0)=0$

B. 函数 $y = f(x)$ 的图像是中心对称图形

C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减

D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$

分析：C.

23.(2013.II.21) 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$.

（Ⅰ）设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）当 $m\le 2$ 时，证明 $f(x)>0$.

分析：

（Ⅰ）$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+m}$.

由 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点得 $f'(0)=0$，所以 $m=1$.

于是 $f(x)=e^x-\ln(x+1)$，定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$.

函数 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增，且 $f'(0)=0$．因此当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

（Ⅱ）当 $m\leqslant 2$，$x\in(-m,+\infty)$ 时，$\ln(x+m)\leqslant\ln(x+2)$，故只需证明当 $m=2$ 时，$f(x)>0$.

当 $m=2$ 时，函数 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 单调递增.

又 $f'(-1)<0, f'(0)>0$，故 $f'(x)=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 有唯一实根 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$.

当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，从而当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值.

由 $f'(x_0)=0$ 得

$$e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2},\quad \ln(x_0+2)=-x_0,$$

故 $f(x)\geqslant f(x_0)=\dfrac{1}{x_0+2}+x_0=\dfrac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$.

综上，当 $m\leqslant 2$ 时，$f(x)>0$.

24.(2014.I.11) 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$， 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围为 （　　）

A.（2，+∞）　　*B*.（-∞，-2）　　*C*.（1，+∞）　　*D*.（-∞，-1）

分析：C.

25.(2014.I.21) 设函数 $f(x0=ae^x\ln x+\dfrac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点（1，$f(1)$ 处的切线为 $y=e(x-1)+2$.（Ⅰ）求 a,b；　（Ⅱ）证明：$f(x)>1$.

分析：

（I）函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=ae^x\ln x+\frac{a}{x}e^x-\frac{b}{x^2}e^{x-1}+\frac{b}{x}e^{x-1}$.　　……5 分

由题意可得$f(1)=2, f'(1)=e$.故$a=1, b=2$.

（II）由（I）知$f(x)=e^x\ln+\frac{2}{x}e^{x-1}$,从而$f(x)>1$等价于$x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$.

设函数$g(x)=x\ln x$,则$g'(x)=\ln x$.

所以当$x\in(0,\frac{1}{e})$时，$g'(x)<0$;当$x\in(\frac{1}{e},+\infty)$时，$g'(x)>0$.

故$g(x)$在（$0,\frac{1}{e}$）单调递减，在（$\frac{1}{e},+\infty$）单调递增，从而$g(x)$在$(0,\infty)$的最小值为　　…8 分

$g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$.

设函数$h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}$,则$h'(x)=e^{-x}(1-x)$.

所以当$x\in(0,1)$时$h'(x)>0$;当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$.故$h(x)$在（0, 1）单调递增，　　……12 分

在$(1,+\infty)$单调递减，从而$h(x)$在$(0,\infty)$的最大值为$h(1)=-\frac{1}{e}$.

综上，当$x>0$时，$g(x)>h(x)$,即$f(x)>1$.

26.(2014.II.8) 设曲线 y=ax-ln(x+1)在点(0,0)处的切线方程为 y=2x，则 a=　　(　　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

分析：D.

27.(2014.II.12) 设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{m}$.若存在 $f(x)$ 的极值点 x_0 满足 $x_0^2+[f(x_0)]^2<m^2$，则 m 的取值范围是　　(　　　)

A. $(-\infty,-6)\cup(6,\infty)$　B. $(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$　C. $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$　D. $(-\infty,-1)\cup(4,\infty)$

分析：C.

28.(2014.II.21) 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ zxxk

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，求 b 的最大值；

（III）已知$1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，估计 ln2 的近似值（精确到 0.001）

分析：（I） $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geq 0$，等号仅当 $x=0$ 时成立。所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$

（Ⅱ） $g(x)=f(2x)-4bf(x)=e^{2x}-e^{-2x}-4b(e^x-e^{-x})+(8b-4)x$

$g'(x)=2[e^{2x}+e^{-2x}-2b(e^x+e^{-x})+(4b-2)]=2(e^x+e^{-x}-2)(e^x+e^{-x}-2b+2)$

（i）当 $b\le 2$ 时，$g'(x)\ge 0$，等号仅当 $x=0$ 时成立，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增。而 $g(0)=0$，所以对任意 $x\succ 0, g(x)\succ 0$；

（ii）当 $b\succ 2$ 时，若 x 满足 $2\prec e^{x}+e^{-x}\prec 2b-2$，即 $0\prec x\prec \ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})$ 时

$g'(x)<0$.而 $g(0)=0$，因此当 $0\prec x\le \ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})$ 时，$g(x)<0$.

综上，b 的最大值为 2.

（III）由（ II ）知，$g(\ln\sqrt{2})=\frac{3}{2}-2\sqrt{2}b+2(2b-1)\ln 2$.

当 b=2 时，$g(\ln\sqrt{2})=\frac{3}{2}-4\sqrt{2}+6\ln 2>0$；$\ln 2>\frac{8\sqrt{2}-3}{12}>0.6928$；

当 $b=\frac{3\sqrt{2}}{4}+1$ 时，$\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})=\ln\sqrt{2}$，$g(\ln\sqrt{2})=-\frac{3}{2}-2\sqrt{2}+(3\sqrt{2}+2)\ln 2<0$，

$\ln 2<\frac{18+\sqrt{2}}{28}<0.6934$

所以 $\ln 2$ 的近似值为 0.693.

29.(2015.I.12) 设函数 $f(x)=e^{x}(2x-1)-ax+a$,其中 $a<1$,若存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是 ( )

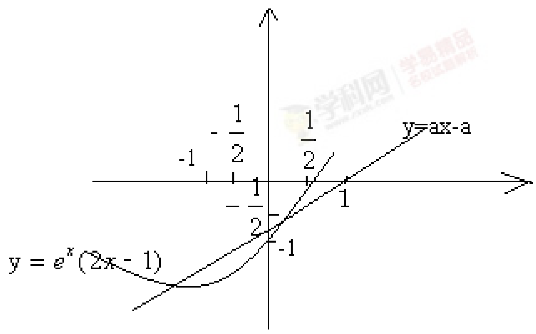
A. $[-\frac{3}{2e}$，1）　　B. $[-\frac{3}{2e}$，$\frac{3}{4}$）　　C. $[\frac{3}{2e}$，$\frac{3}{4}$）　　D. $[\frac{3}{2e}$，1）

【答案】D

【解析】设 $g(x)=e^{x}(2x-1)$，$y=ax-a$，由题知存在唯一的整数 x_0，使得 $g(x_0)$ 在直线 $y=ax-a$ 的下方.

因为 $g'(x)=e^{x}(2x+1)$，所以当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$，所以当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$[g(x)]_{max}=-2e^{-\frac{1}{2}}$，

当 $x=0$ 时，$g(0)=-1$，$g(1)=3e>0$，直线 $y=ax-a$ 恒过（1，0）斜率且 a，故 $-a>g(0)=-1$，且 $g(-1)=-3e^{-1}\ge -a-a$，解得 $\frac{3}{2e}\le a<1$，故选 D.



【考点定位】本题主要通过利用导数研究函数的图像与性质解决不等式成立问题

【名师点睛】对存在性问题有三种思路，思路 1：参变分离，转化为参数小于某个函数（或参数大于某个函数），则参数该于该函数的最大值（大于该函数的最小值）；思路 2：数形结合，利用导数先研究函数的图像与性质，再画出该函数的草图，结合图像确定参数范围，若原函数图像不易做，常化为一个函数存在一点在另一个函数上方，用图像解；思路 3：分类讨论，本题用的就是思路 2.

30.(2015.I.21) 已知函数 $f（x）=x^3+ax+\frac{1}{4},g(x)=-\ln x$.

(Ⅰ)当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（Ⅱ）用 min $\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}(x>0)$ ，讨论 h（x）零点的个数.

【答案】（Ⅰ）$a=\frac{3}{4}$；（Ⅱ）当 $a>-\frac{3}{4}$ 或 $a<-\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 由一个零点；当 $a=-\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有两个零点；当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$h(x)$ 有三个零点.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）先利用导数的几何意义列出关于切点的方程组，解出切点坐标与对应的 a 值；（Ⅱ）根据对数函数的图像与性质将 x 分为 $x>1,x=1,0<x<1$ 研究 $h(x)$ 的零点个数，若零点不容易求解，则对 a 再分类讨论.

试题解析：（Ⅰ）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切于点 $(x_0,0)$，则 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)=0$，即 $\begin{cases}x_0^3+ax_0+\frac{1}{4}=0\\3x_0^2+a=0\end{cases}$，

解得 $x_0=\frac{1}{2},a=\frac{3}{4}$.

因此，当 $a=\frac{3}{4}$ 时，x 轴是曲线 $y=f(x)$ 的切线. ……5 分

（Ⅱ）当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)=-\ln x<0$，从而 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}\le g(x)<0$，

$\therefore h(x)$ 在（1，+∞）无零点.

当 x=1 时，若 $a\ge-\frac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\frac{5}{4}\ge0$，$h(1)=\min\{f(1),g(1)\}=g(1)=0$，故 x=1 是 $h(x)$ 的零点；

若 $a<-\frac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\frac{5}{4}<0$，$h(1)=\min\{f(1),g(1)\}=f(1)<0$，故 x=1 不是 $h(x)$ 的零点.

当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)=-\ln x>0$，所以只需考虑 $f(x)$ 在（0，1）的零点个数.

（ⅰ）若 $a\le-3$ 或 $a\ge0$，则 $f'(x)=3x^2+a$ 在（0，1）无零点，故 $f(x)$ 在（0，1）单调，而 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$，所以当 $a\le-3$ 时，$f(x)$ 在（0，1）有一个零点；当 $a\ge0$ 时，$f(x)$ 在（0，1）无零点.

（ⅱ）若 $-3<a<0$，则 $f(x)$ 在（0，$\sqrt{-\frac{a}{3}}$）单调递减，在（$\sqrt{-\frac{a}{3}}$，1）单调递增，

故当 $x=\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 时， $f(x)$ 取的最小值，最小值为 $f(\sqrt{-\frac{a}{3}})=\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+\frac{1}{4}$.

①若 $f(\sqrt{-\frac{a}{3}})>0$，即 $-\frac{3}{4}<a<0$， $f(x)$ 在（0,1）无零点.

②若 $f(\sqrt{-\frac{a}{3}})=0$，即 $a=-\frac{3}{4}$，则 $f(x)$ 在（0,1）有唯一零点；

③若 $f(\sqrt{-\frac{a}{3}})<0$，即 $-3<a<-\frac{3}{4}$，由于 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$，所以当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$f(x)$ 在(0,1)有两个零点；当 $-3<a\le-\frac{5}{4}$ 时， $f(x)$ 在（0,1）有一个零点.…10 分

综上，当 $a>-\frac{3}{4}$ 或 $a<-\frac{5}{4}$ 时， $h(x)$ 由一个零点；当 $a=-\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{5}{4}$ 时， $h(x)$ 有两个零点；当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时， $h(x)$ 有三个零点. ……12 分

【考点定位】利用导数研究曲线的切线；对新概念的理解；分段函数的零点；分类整合思想

【名师点睛】本题主要考查函数的切线、利用导数研究函数的图像与性质、利用图像研究分段函数的零点，试题新颖.对函数的切线问题，主要在某一点的切线与过某一点点的切线不同，在某点的切线该点是切点，过某点的切线该点不一定是切点，对过某点的切线问题，设切点，利用导数求切线，将已知点代入切线方程，解出切点坐标，即可求出切线方程.

31.(2015.II.21) 设函数 $f(x)=e^{mx}+x^2-mx$.

(Ⅰ) 证明： $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

（Ⅱ）若对于任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le e-1$，求 m 的取值范围.

【答案】(Ⅰ)详见解析；（Ⅱ） $[-1,1]$.

【解析】(Ⅰ) $f'(x)=m(e^{mx}-1)+2x$.

若 $m\ge0$，则当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $e^{mx}-1\le0$， $f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $e^{mx}-1\ge0$， $f'(x)>0$.

若 $m<0$，则当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $e^{mx}-1>0$， $f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $e^{mx}-1<0$， $f'(x)>0$.

所以， $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

（Ⅱ）由(Ⅰ)知，对任意的 m， $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 单调递减，在 $[0,1]$ 单调递增，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值．所以对于任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$， $|f(x_1)-f(x_2)|\le e-1$ 的充要条件是： $\begin{cases} f(1)-f(0)\le e-1, \\ f(-1)-f(0)\le e-1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} e^m-m\le e-1, \\ e^{-m}+m\le e-1, \end{cases}$ ①，设函数 $g(t)=e^t-t-e+1$，则 $g'(t)=e^t-1$．当 $t<0$ 时， $g'(t)<0$；当 $t>0$ 时， $g'(t)>0$．故 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增．又 $g(1)=0$， $g(-1)=e^{-1}+2-e<0$，故当 $t\in[-1,1]$ 时， $g(t)\le 0$．当 $m\in[-1,1]$ 时， $g(m)\le 0$， $g(-m)\le 0$，即①式成立．当 $m>1$ 时，由 $g(t)$ 的单调性， $g(m)>0$，即 $e^m-m>e-1$；当 $m<-1$ 时， $g(-m)>0$，即 $e^{-m}+m>e-1$．综上， m 的取值范围是 $[-1,1]$．

【考点定位】导数的综合应用．

【名师点睛】(Ⅰ)先求导函数 $f'(x)=m(e^{mx}-1)+2x$，根据 m 的范围讨论导函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 的符号即可；（Ⅱ） $|f(x_1)-f(x_2)|\le e-1$ 恒成立，等价于 $|f(x_1)-f(x_2)|_{\max}\le e-1$．由 x_1,x_2 是两个独立的变量，故可求研究 $f(x)$ 的值域，由(Ⅰ)可得最小值为 $f(0)=1$，最大值可能是 $f(-1)$ 或 $f(1)$，故只需 $\begin{cases} f(1)-f(0)\le e-1, \\ f(-1)-f(0)\le e-1, \end{cases}$，从而得关于 m 的不等式，因不易解出，故利用导数研究其单调性和符号，从而得解．