6 数列

湖南师大附中，数学教研组，张湘君

1.(2007.I.15) 等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知S_1，$2S_2$，$3S_3$成等差数列，则$\{a_n\}$的公比为________.

2.(2007.I.22) 已知数列$\{a_n\}$中$a_1=2$，$a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)(a_n+2)$，$n=1,2,3,\cdots$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\{b_n\}$中$b_1=2$，$b_{n+1}=\dfrac{3b_n+4}{2b_n+3}$，$n=1,2,3,\cdots$，证明：$\sqrt{2}<b_n\leqslant a_{4n-3}$，$n=1,2,3,\cdots$.

3.(2007.II.16) 已知数列的通项$a_n=-5n+2$，其前n项和为S_n，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}=$___________.

4.(2007.II.21) 设数列$\{a_n\}$的首项$a_1\in(0,1)$，$a_n=\dfrac{3-a_{n-1}}{2}$，$n=2,3,4,\cdots$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=a_n\sqrt{3-2a_n}$，证明$b_n<b_{n+1}$，其中n为正整数.

5.(2008.I.5) 已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=4$，$a_3+a_5=10$，则它的前10项的和$S_{10}=$(　　)

A．138　　B．135　　C．95　　D．2

6.(2008.I.22) 设函数$f(x)=x-x\ln x$．数列$\{a_n\}$满足$0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$.

（Ⅰ）证明：函数$f(x)$在区间$(0,1)$是增函数；

（Ⅱ）证明：$a_n<a_{n+1}<1$；

（Ⅲ）设$b\in(a_1,1)$，整数$k\geqslant\dfrac{a_1-b}{a_1\ln b}$．证明：$a_{k+1}>b$.

7.(2008.II.20) 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．已知$a_1=a$，$a_{n+1}=S_n+3^n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（Ⅰ）设$b_n=S_n-3^n$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若$a_{n+1}\geqslant a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求a的取值范围．

8.(2009.I.14) 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_9=72$,则$a_2+a_4+a_9$=___________.

9.(2009.I.20) 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1, a_{n+1}=(1+\frac{1}{n})a_n+\frac{n+1}{2^n}$

（I）设$b_n=\frac{a_n}{n}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式;

（II）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

10.(2009.II.14) 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_5=5a_3$则$\frac{S_9}{S_5}=$___________.

11.(2009.II.19) 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=1$, $S_{n+1}=4a_n+2$

（I）设$b_n=a_{n+1}-2a_n$，证明数列$\{b_n\}$是等比数列

（II）求数列$\{a_n\}$的通项公式。

12.(2010.I.4) 已知各项均为正数的等比数列{ a_n }， $a_1a_2a_3=5$， $a_7a_8a_9=10$，则 $a_4a_5a_6=$(　　)

A. $5\sqrt{2}$　　B. 7　　C. 6　　D. $4\sqrt{2}$

13.(2010.I.18) 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=(n^2+n)\bullet 3^n$.

（Ⅰ）求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$；

（Ⅱ）证明：$\dfrac{a_1}{1^2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n^2}>3^n$.

14.(2011.I.17) 等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$2a_1+3a_2=1, a_3{}^2=9a_2a_6$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+......+\log_3 a_n$, 求数列$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$的前 n 项和.

15.(2011.II.4) 设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_1=1$，公差$d=2$，$S_{k+2}-S_k=24$，则$k=$(　　)

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5

16.(2011.II.20) 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$且$\dfrac{1}{1-a_{n+1}}-\dfrac{1}{1-a_n}=1$.

(I) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)设$b_n=\dfrac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}$,记$\mathrm{S}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$,证明：$S_n<1$.

17.(2012.I.5) 已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_4+a_7=2$，$a_5a_6=-8$，则$a_1+a_{10}=$ (　　)

$(A)\ 7$　　$(B)\ 5$　　$(C)\ -5$　　$(D)\ -7$

18.(2012.I.16) 数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则$\{a_n\}$的前60项和为_______.

19.(2012.II.5) 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n, a_5=5, S_5=15$，则数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前100项和为 (　　)

A. $\frac{100}{101}$　　B. $\frac{99}{101}$　　C. $\frac{99}{100}$　　D. $\frac{101}{100}$

20.(2012.II.22) 函数$f(x)=x^2-2x-3$。定义数列$\{x_n\}$如下：$x_1=2, x_{n+1}$是过两点$P(4,5), Q_n(x_n, f(x_n))$的直线PQ_n与x轴交点的横坐标。

（1）证明：$2\le x_n<x_{n+1}<3$；

（2）求数列$\{x_n\}$的通项公式。

21.(2013.I.7) 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n, S_{m-1}=-2, S_m=0, S_{m+1}=3$，则$m=$ (　　)

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

22.(2013.I.12) 设$\Delta A_nB_nC_n$的三边长分别为a_n, b_n, c_n，$\Delta A_nB_nC_n$的面积为S_n，$n=1,2,3,\cdots$，若$b_1>c_1, b_1+c_1=2a_1$，$a_{n+1}=a_n, b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2}, c_{n+1}=\frac{b_n+a_n}{2}$，则 (　　)

A.$\{S_n\}$为递减数列　　B.$\{S_n\}$为递增数列

C.$\{S_{2n-1}\}$为递增数列，$\{S_{2n}\}$为递减数列　　D.$\{S_{2n-1}\}$为递减数列，$\{S_{2n}\}$为递增数列

23.(2013.I.14) 若数列{a_n}的前n项和为$S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$，则数列{$a_n$}的通项公式是$a_n=$______.

24.(2013.II.3) 等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_3=a_2+10a_1$，$a_5=9$，则$a_1=$(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $-\frac{1}{9}$

25.(2013.II.16) 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_{10}=0, S_{15}=25$，则nS_n的最小值为____.

26.(2014.I.17) 已知数列{ a_n }的前 n 项和为 S_n ， a_1=1， $a_n \neq 0$ ， $a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$，其中 λ 为常数.

（Ⅰ）证明： $a_{n+2} - a_n = \lambda$；

（Ⅱ）是否存在 λ ，使得{ a_n }为等差数列？并说明理由.

27.(2014.II.17) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 a_1=1， $a_{n+1} = 3a_n + 1$.

（Ⅰ）证明 $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）证明： $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.

28.(2015.I.17) S_n 为数列{ a_n }的前 n 项和.已知 a_n ＞0， $a_n^2 + a_n = 4S_n + 3$.

（Ⅰ）求{ a_n }的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n = \dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$,求数列{ b_n }的前 n 项和.

29.(2015.II.4) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 a_1=3， $a_1 + a_3 + a_5$ =21，则 $a_3 + a_5 + a_7 =$(　　　　)

A．21　　　B．42　　　C．63　　　D．84

30.(2015.II.16) 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1 = -1$， $a_{n+1} = S_n S_{n+1}$，则 $S_n =$ ________.

6 数列

湖南师大附中，数学教研组，张湘君

1.(2007.I.15) 等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知S_1，$2S_2$，$3S_3$成等差数列，则$\{a_n\}$的公比为________.

分析：填$\frac{1}{3}$．设数列的首项为a_1，公比为q，则$4a_1+4a_1q=a_1+(3a_1+3a_1q+3a_1q^2)$，（$q\neq 0$）整理得$3q^2-q=0$，解得$q=\frac{1}{3}$（$q=0$舍去）.

2.(2007.I.22) 已知数列$\{a_n\}$中$a_1=2$，$a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)(a_n+2)$，$n=1,2,3,\cdots$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\{b_n\}$中$b_1=2$，$b_{n+1}=\dfrac{3b_n+4}{2b_n+3}$，$n=1,2,3,\cdots$，证明：$\sqrt{2}<b_n\leqslant a_{4n-3}$，$n=1,2,3,\cdots$.

分析：（Ⅰ）由题设：$a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)(a_n+2)=(\sqrt{2}-1)(a_n-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})$

$=(\sqrt{2}-1)(a_n-\sqrt{2})+\sqrt{2}$，$a_{n+1}-\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)(a_n-\sqrt{2})$.

所以，数列$\left\{a_n-\sqrt{2}\right\}$是首项为$2-\sqrt{2}$，公比为$\sqrt{2}-1$的等比数列，$a_n-\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^n$，

即a_n的通项公式为$a_n=\sqrt{2}\left[(\sqrt{2}-1)^n+1\right]$，$n=1,2,3,\cdots$.

（Ⅱ）用数学归纳法证明.

（ⅰ）当$n=1$时，因$\sqrt{2}<2$，$b_1=a_1=2$，所以$\sqrt{2}<b_1\leqslant a_1$，结论成立.

（ⅱ）假设当$n=k$时，结论成立，即$\sqrt{2}<b_k\leqslant a_{4k-3}$，也即$0<b_k-\sqrt{2}\leqslant a_{4k-3}-\sqrt{3}$.

当$n=k+1$时，$b_{k+1}-\sqrt{2}=\dfrac{3b_k+4}{2b_k+3}-\sqrt{2}=\dfrac{(3-2\sqrt{2})b_k+(4-3\sqrt{2})}{2b_k+3}=\dfrac{(3-2\sqrt{2})(b_k-\sqrt{2})}{2b_k+3}>0$，

又$\dfrac{1}{2b_k+3}<\dfrac{1}{2\sqrt{2}+3}=3-2\sqrt{2}$，所以$b_{k+1}-\sqrt{2}=\dfrac{(3-2\sqrt{2})(b_k-\sqrt{2})}{2b_k+3}<(3-2\sqrt{2})^2(b_k-\sqrt{2})$

$\leqslant(\sqrt{2}-1)^4(a_{4k-3}-\sqrt{2})=a_{4k+1}-\sqrt{2}$.

也就是说，当$n=k+1$时，结论成立.

根据（ⅰ）和（ⅱ）知$\sqrt{2}<b_n\leqslant a_{4n-3}$，$n=1,2,3,\cdots$.

3.(2007.II.16) 已知数列的通项 $a_n=-5n+2$，其前 n 项和为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=$ ____________.

分析：$-\frac{5}{2}$.

4.(2007.II.21) 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1\in(0,1)$，$a_n=\frac{3-a_{n-1}}{2}$，$n=2,3,4,\cdots$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=a_n\sqrt{3-2a_n}$，证明 $b_n<b_{n+1}$，其中 n 为正整数.

分析：（1）由 $a_n=\frac{3-a_{n-1}}{2}$，$n=2,3,4,\cdots$，整理得 $1-a_n=-\frac{1}{2}(1-a_{n-1})$.

又 $1-a_1\neq 0$，所以 $\{1-a_n\}$ 是首项为 $1-a_1$，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列，得 $a_n=1-(1-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

（2）方法一：由（1）可知 $0<a_n<\frac{3}{2}$，故 $b_n>0$.

那么，$b_{n+1}^2-b_n^2=a_{n+1}^2(3-2a_{n+1})-a_n^2(3-2a_n)=\left(\frac{3-a_n}{2}\right)^2\left(3-2\times\frac{3-a_n}{2}\right)-a_n^2(3-2a_n)=\frac{9a_n}{4}(a_n-1)^2.$

又由（1）知 $a_n>0$ 且 $a_n\neq 1$，故 $b_{n+1}^2-b_n^2>0$，因此 $b_n<b_{n+1}$，n 为正整数.

方法二：由（1）可知 $0<a_n<\frac{3}{2}$，$a_n\neq 1$，因为 $a_{n+1}=\frac{3-a_n}{2}$，

所以 $b_{n+1}=a_{n+1}\sqrt{3-2a_{n+1}}=\frac{(3-a_n)\sqrt{a_n}}{2}$.

由 $a_n\neq 1$ 可得 $a_n(3-2a_n)<\left(\frac{3-a_n}{2}\right)^3$，即 $a_n^2(3-2a_n)<\left(\frac{3-a_n}{2}\right)^2\bullet a_n$

两边开平方得 $a_n\sqrt{3-2a_n}<\frac{3-a_n}{2}\bullet\sqrt{a_n}$. 即 $b_n<b_{n+1}$，n 为正整数.

5.(2008.I.5) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=4$，$a_3+a_5=10$，则它的前 10 项的和 $S_{10}=($　　$)$

A．138　　B．135　　C．95　　D．2

分析：C. 由 $a_2+a_4=4,a_3+a_5=10\Rightarrow a_1=-4,d=3,S_{10}=10a_1+45d=95$.

6.(2008.I.22) 设函数 $f(x)=x-x\ln x$. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$.

（Ⅰ）证明：函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 是增函数；

（Ⅱ）证明：$a_n<a_{n+1}<1$；

（III）设 $b\in(a_1,1)$，整数 $k\geqslant\dfrac{a_1-b}{a_1\ln b}$． 证明：$a_{k+1}>b$．

分析：（Ⅰ）证明：$f(x)=x-x\ln x$， $f'(x)=-\ln x$，当$x\in(0,1)$时，$f'(x)=-\ln x>0$

故函数 $f(x)$ 在区间(0,1)上是增函数；

（Ⅱ）证明：（用数学归纳法）（i）当 n=1 时，$0<a_1<1$， $a_1\ln a_1<0$，

$a_2=f(a_1)=a_1-a_1\ln a_1>a_1$

由函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 是增函数，且函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 是增函数，

$a_2=f(a_1)=a_1-a_1\ln a_1<1$， 即 $a_1<a_2<1$成立；

（ii）假设当 $x=k(k\in N^*)$ 时， $a_k<a_{k+1}<1$成立， 即 $0<a_1\leqslant a_k<a_{k+1}<1$

那么当 $n=k+1$时， 由 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 是增函数， $0<a_1\leqslant a_k<a_{k+1}<1$ 得

$f(a_k)<f(a_{k+1})<f(1)$.而 $a_{n+1}=f(a_n)$， 则 $a_{k+1}=f(a_k),a_{k+2}=f(a_{k+1})$，

$a_{k+1}<a_{k+2}<1$， 也就是说当 $n=k+1$时， $a_n<a_{n+1}<1$ 也成立；

根据（i）、（ii）可得对任意的正整数 n， $a_n<a_{n+1}<1$ 恒成立.

（III）证明：由 $f(x)=x-x\ln x$． $a_{n+1}=f(a_n)$ 可得

$$a_{k+1}-b=a_k-b-a_k\ln a_k=a_1-b-\sum_{i=1}^{k}a_i\ln a_i$$

1，若存在某 $i\leqslant k$ 满足 $a_i\leqslant b$， 则由⑵知： $a_{k+1}-b<a_i-b\geqslant 0$

2，若对任意 $i\leqslant k$ 都有 $a_i>b$， 则 $a_{k+1}-b=a_k-b-a_k\ln a_k$

$=a_1-b-\sum_{i=1}^{k}a_i\ln a_i=a_1-b-\sum_{i=1}^{k}a_i\ln b=a_1-b-(\sum_{i=1}^{k}a_i)\ln b>a_1-b-ka_1\ln b$

$\geqslant a_1-b-ka_1\ln b>a_1-b-(a_1-b)=0$， 即 $a_{k+1}>b$ 成立.

7.(2008.II.20) 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n． 已知 $a_1=a$， $a_{n+1}=S_n+3^n$， $n\in\mathbf{N}^*$．

（Ⅰ）设 $b_n=S_n-3^n$， 求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若 $a_{n+1}\geqslant a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求 a 的取值范围.

分析：（Ⅰ）依题意，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=S_n+3^n$，即 $S_{n+1}=2S_n+3^n$，

由此得 $S_{n+1}-3^{n+1}=2(S_n-3^n)$. ……………………………………………………4 分

因此，所求通项公式为 $b_n=S_n-3^n=(a-3)2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$. ① …………………6 分

（Ⅱ）由①知 $S_n=3^n+(a-3)2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，于是，当 $n\geqslant 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n+(a-3)\times 2^{n-1}-3^{n-1}-(a-3)\times 2^{n-2}=2\times 3^{n-1}+(a-3)2^{n-2}$，

$$a_{n+1}-a_n=4\times 3^{n-1}+(a-3)2^{n-2}=2^{n-2}\left[12\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}+a-3\right],$$

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}\geqslant a_n\Leftrightarrow 12\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}+a-3\geqslant 0\Leftrightarrow a\geqslant -9$.

又 $a_2=a_1+3>a_1$. 综上，所求的 a 的取值范围是 $[-9,+\infty)$. …………………12 分

8.(2009.I.14) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_9=72$,则 $a_2+a_4+a_9=$__________.

分析：$\because\{a_n\}$ 是等差数列,由 $S_9=72$,得 $\therefore S_9=9a_5$, $a_5=8$

$\therefore a_2+a_4+a_9=(a_2+a_9)+a_4=(a_5+a_6)+a_4=3a_5=24$.

9.(2009.I.20) 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_{n+1}=(1+\frac{1}{n})a_n+\frac{n+1}{2^n}$

（I）设 $b_n=\frac{a_n}{n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

（II）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

分析：（I）由已知有 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{2^n}$ $\therefore b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2^n}$，利用累差迭加即可求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式: $b_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$ ($n\in N^*$)

（II）由（I）知 $a_n=2n-\frac{n}{2^{n-1}}$，$\therefore S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-\frac{k}{2^{k-1}})=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}$，而 $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k)=n(n+1)$,又

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}$ 是一个典型的错位相减法模型，易得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$ $\therefore S_n=n(n+1)+\frac{n+2}{2^{n-1}}-4$

评析：09 年高考理科数学全国(一)试题将数列题前置,考查构造新数列和利用错位相减法求前 n 项和，一改往年的将数列结合不等式放缩法问题作为押轴题的命题模式。具有让考生

和一线教师重视教材和基础知识、基本方法基本技能,重视两纲的导向作用。也可看出命题人在有意识降低难度和求变的良苦用心。

10.(2009.II.14) 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_5=5a_3$则$\frac{S_9}{S_5}=$__________.

分析：$\because\{a_n\}$为等差数列，$\therefore\frac{S_9}{S_5}=\frac{9a_5}{5a_3}=9$.

11.(2009.II.19) 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=1,\ S_{n+1}=4a_n+2$

（I）设$b_n=a_{n+1}-2a_n$，证明数列$\{b_n\}$是等比数列

（II）求数列$\{a_n\}$的通项公式。

分析：（I）由$a_1=1$, 及$S_{n+1}=4a_n+2$，有$a_1+a_2=4a_1+2,\ a_2=3a_1+2=5,\therefore b_1=a_2-2a_1=3$

由$S_{n+1}=4a_n+2$，. . . . ①　则当$n\geq2$时，有$S_n=4a_{n-1}+2$. . . . . . ②

②－①得$a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1},\therefore a_{n+1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})$

又$\because b_n=a_{n+1}-2a_n$，$\therefore b_n=2b_{n-1}\ \therefore\{b_n\}$是首项$b_1=3$，公比为 2 的等比数列.

（II）由（I）可得$b_n=a_{n+1}-2a_n=3\cdot2^{n-1}$，$\therefore\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{4}$

$\therefore$数列$\{\frac{a_n}{2^n}\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公差为$\frac{3}{4}$的等比数列.

$\therefore\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{3}{4}=\frac{3}{4}n-\frac{1}{4}$，$a_n=(3n-1)\cdot2^{n-2}$

评析：第（I）问思路明确，只需利用已知条件寻找b_n与b_{n-1}的关系即可.

第（II）问中由（I）易得$a_{n+1}-2a_n=3\cdot2^{n-1}$，这个递推式明显是一个构造新数列的模型：

$a_{n+1}=pa_n+q^n(p,q$为常数$)$，主要的处理手段是两边除以q^{n+1}.

总体来说，09 年高考理科数学全国 **I**、II 这两套试题都将数列题前置,主要考查构造新数列（全国 **I** 还考查了利用错位相减法求前 n 项和的方法），一改往年的将数列结合不等式放缩法问题作为押轴题的命题模式。具有让考生和一线教师重视教材和基础知识、基本方法基本技能,重视两纲的导向作用。也可看出命题人在有意识降低难度和求变的良苦用心

12.(2010.I.4) 已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$，$a_1a_2a_3=5$，$a_7a_8a_9=10$，则$a_4a_5a_6=$( )

A. $5\sqrt{2}$　　B. 7　　C. 6　　D. $4\sqrt{2}$

分析：A【命题意图】本小题主要考查等比数列的性质、指数幂的运算、根式与指数式的互化等知识，着重考查了转化与化归的数学思想.

【解析 1】由等比数列的性质知 $a_1a_2a_3=(a_1a_3)\bullet a_2=a_2^3=5$，$a_7a_8a_9=(a_7a_9)\bullet a_8=a_8^3=10$，所以 $a_2a_8=50^{\frac{1}{3}}$，所以 $a_4a_5a_6=(a_4a_6)\bullet a_5=a_5^3=(\sqrt{a_2a_8})^3=(50^{\frac{1}{6}})^3=5\sqrt{2}$

【解析 2】$a_1a_2a_3=5\Rightarrow a_2^3=5$；$a_7a_8a_9=10\Rightarrow a_8^3=10,\Rightarrow a_5^6=a_2^3a_8^3=50\Rightarrow a_4a_5a_6=a_5^3=5\sqrt{2}$

13.(2010.I.18) 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=(n^2+n)\bullet 3^n$．

（Ⅰ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}$；

（Ⅱ）证明：$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}>3^n$．

分析：【命题意图】本试题主要考查数列基本公式 $a_n=\begin{cases}s_1(n=1)\\ s_n-s_{n-1}(n\ge 2)\end{cases}$ 的运用，数列极限和数列不等式的证明，考查考生运用所学知识解决问题的能力.

【参考答案】

（Ⅰ）
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{S_{n-1}}{S_n})=1-\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\frac{2}{3}.$$

（Ⅱ）当 $n=1$ 时，$\frac{a_1}{1^2}=S_1=6>3$；

当 $n>1$ 时，
$$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$$
$$=\frac{S_1}{1^2}+\frac{S_2-S_1}{2^2}+\cdots+\frac{S_n-S_{n-1}}{n^2}$$
$$=(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2})\cdot S_1+(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})\cdot S_2+\cdots+(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2})\cdot S_{n-1}+\frac{1}{n^2}\cdot S_n$$
$$>\frac{S_n}{n^2}$$
$$=\frac{n^2+n}{n^2}\cdot 3^n>3^n.$$
所以，当 $n\geqslant 1$ 时，$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}>3^n$.

【点评】2010 年高考数学全国 I、II 这两套试卷都将数列题前置，一改往年的将数列结合不等式放缩法问题作为押轴题的命题模式，具有让考生和一线教师重视教材和基础知识、基本方法基本技能，重视两纲的导向作用，也可看出命题人在有意识降低难度和求变的良苦用心.
估计以后的高考，对数列的考查主要涉及数列的基本公式、基本性质、递推数列、数列求和、数列极限、简单的数列不等式证明等，这种考查方式还要持续.

14.(2011.I.17) 等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$2a_1+3a_2=1, a_3{}^2=9a_2a_6$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+......+\log_3 a_n$, 求数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$的前 n 项和.

分析：（Ⅰ）设数列{a_n}的公比为 q，由$a_3^2=9a_2a_6$得$a_3^3=9a_4^2$所以$q^2=\frac{1}{9}$。

由条件可知 a>0,故$q=\frac{1}{3}$。由$2a_1+3a_2=1$得$2a_1+3a_2q=1$，所以$a_1=\frac{1}{3}$。

故数列{a_n}的通项式为 $a_n=\frac{1}{3^n}$。

（Ⅱ）$b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+...+\log_3 a_n \begin{aligned}&=-(1+2+...+n)\\&=-\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$，故$\frac{1}{b_n}=-\frac{2}{n(n+1)}=-2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+...+\frac{1}{b_n}=-2((1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}))=-\frac{2n}{n+1}$$

所以数列$\{\frac{1}{b_n}\}$的前 n 项和为$-\frac{2n}{n+1}$

15.(2011.II.4) 设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_1=1$，公差$d=2$，$S_{k+2}-S_k=24$，则$k=$(　　)

A. 8　　　　B. 7　　　　C. 6　　　　D. 5

分析：D

【命题意图】本题主要考查等差数列的基本公式的应用.

【解析】解法一 $S_{k+2}-S_k=[(k+2)\times1+\frac{(k+2)(k+1)}{2}\times2]-[k\times1+\frac{k(k-1)}{2}\times2]=4k+4=24$，解得$k=5$.

解法二: $S_{k+2}-S_k=a_{k+2}+a_{k+1}=[1+(k+1)\times2]+(1+k\times2)=4k+4=24$，解得$k=5$.

16.(2011.II.20) 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$且$\frac{1}{1-a_{n+1}}-\frac{1}{1-a_n}=1$.

(I) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)设$b_n=\frac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}$,记$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$,证明：$S_n<1$.

分析：【命题意图】本题主要考查等差数列的定义及其通项公式,裂项相消法求和,不等式的证明，考查考生分析问题、解决问题的能力.

【解析】(Ⅰ)由题设$\frac{1}{1-a_{n+1}}-\frac{1}{1-a_n}=1$,即$\{\frac{1}{1-a_n}\}$是公差为1的等差数列.

又$\frac{1}{1-a_1}=1$,故$\frac{1}{1-a_n}=n$.所以$a_n=1-\frac{1}{n}$ ....5分#

(Ⅱ) 由(Ⅰ)得$b_n=\frac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\bullet\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}})=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<1$$ 12分

【点评】2011年高考数学全国卷将数列题由去年的第18题后移,一改往年的将数列结合不等式放缩法问题作为押轴题的命题模式，具有让考生和一线教师重视教材和基础知识、基本方法基本技能,重视两纲的导向作用，也可看出命题人在有意识降低难度和求变的良苦用心.估计以后的高考，对数列的考查主要涉及数列的基本公式、基本性质、递推数列、数列求和、数列极限、简单的数列不等式证明等，这种考查方式还要持续.

17.(2012.I.5) 已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_4+a_7=2$，$a_5a_6=-8$，则$a_1+a_{10}=$ ( )

(A) 7 (B) 5 (C) -5 (D) -7

分析：选D

$a_4+a_7=2$，$a_5a_6=a_4a_7=-8\Rightarrow a_4=4,a_7=-2$ 或 $a_4=-2,a_7=4$

$a_4=4,a_7=-2\Rightarrow a_1=-8,a_{10}=1\Leftrightarrow a_1+a_{10}=-7$

$a_4=-2,a_7=4\Rightarrow a_{10}=-8,a_1=1\Leftrightarrow a_1+a_{10}=-7$

18.(2012.I.16) 数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则$\{a_n\}$的前60项和为________.

分析：$\{a_n\}$的前60项和为__________1830

可证明：$b_{n+1}=a_{4n+1}+a_{4n+2}+a_{4n+3}+a_{4n+4}=a_{4n-3}+a_{4n-2}+a_{4n-2}+a_{4n}+16=b_n+16$

$b_1=a_1+a_2+a_3+a_4=10\Rightarrow S_{15}=10\times15+\frac{15\times14}{2}\times16=1830$

19.(2012.II.5) 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n,a_5=5,S_5=15$，则数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前100项和为 ( )

A. $\frac{100}{101}$ B. $\frac{99}{101}$ C. $\frac{99}{100}$ D. $\frac{101}{100}$

分析：A

【命题意图】本试题主要考查等差数列的通项公式和前 n 项和的公式的运用，以及裂项求和的综合运用，通过已知中两项，得到公差与首项，得到数列的通项公式，并进一步裂项求和。

【解析】由 $S_n,a_5=5,S_5=15$ 可得 $\begin{cases}a_1+4d=5\\5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=1\\d=1\end{cases}\Rightarrow a_n=n$

$\therefore\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ $\qquad S_{100}=(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{100}-\dfrac{1}{101})=1-\dfrac{1}{101}=\dfrac{100}{101}$

20.(2012.II.22) 函数 $f(x)=x^2-2x-3$。定义数列 $\{x_n\}$ 如下： $x_1=2,x_{n+1}$ 是过两点 $P(4,5),Q_n(x_n,f(x_n))$ 的直线 PQ_n 与 x 轴交点的横坐标。

（1）证明： $2\le x_n<x_{n+1}<3$；

（2）求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式。

分析：（1）为 $f(4)=4^2-8-3=5$，故点 $P(4,5)$ 在函数 $f(x)$ 的图像上，故由所给出的两点 $P(4,5),Q_n(x_n,f(x_n))$，可知，直线 PQ_n 斜率一定存在。故有

直线 PQ_n 的直线方程为 $y-5=\dfrac{f(x_n)-5}{x_n-4}(x-4)$，令 $y=0$，可求得

$-5=\dfrac{x_n^2-2x_n-8}{x_n-4}(x-4)\Leftrightarrow\dfrac{-5}{x_n+2}=x-4\Leftrightarrow x=\dfrac{4x_n+3}{x_n+2}$ $\qquad$ 所以 $x_{n+1}=\dfrac{4x_n+3}{x_n+2}$

下面用数学归纳法证明 $2\le x_n<3$

当 $n=1$ 时， $x_1=2$，满足 $2\le x_1<3$

假设 $n=k$ 时， $2\le x_k<3$ 成立，则当 $n=k+1$ 时， $x_{k+1}=\dfrac{4x_k+3}{x_k+2}=4-\dfrac{5}{x_k+2}$，

由 $2\le x_k<3\Leftrightarrow4\le x_k+2<5\Leftrightarrow1<\dfrac{5}{x_k+2}\le\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow2<\dfrac{11}{4}\le4-\dfrac{5}{x_k+2}<3$ 即 $2\le x_{k+1}<3$ 也成立

综上可知 $2\le x_n<3$ 对任意正整数恒成立。 下面证明 $x_n<x_{n+1}$

由 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{4x_n+3}{x_n+2}-x_n=\dfrac{4x_n+3-x_n^2-2x_n}{x_n+2}=\dfrac{-(x_n-1)^2+4}{x_n+2}$

由 $2\le x_n<3\Rightarrow 1\le x_n-1<2\Rightarrow 0<-(x_n-1)^2+4\le 3$，故有 $x_{n+1}-x_n>0$ 即 $x_n<x_{n+1}$

综上可知 $2\le x_n<x_{n+1}<3$ 恒成立。

（2）由 $x_{n+1}=\dfrac{4x_n+3}{x_n+2}$ 得到该数列的一个特征方程 $x=\dfrac{4x+3}{x+2}$ 即 $x^2-2x-3=0$，解得 $x=3$ 或

$x=-1$ $\quad\therefore\ x_{n+1}-3=\dfrac{4x_n+3}{x_n+2}-3=\dfrac{x_n-3}{x_n+2}$ ① $\qquad x_{n+1}-(-1)=\dfrac{4x_n+3}{x_n+2}+1=\dfrac{5x_n+5}{x_n+2}$ ②

两式相除可得 $\dfrac{x_{n+1}-3}{x_{n+1}+1}=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{x_n-3}{x_n+1}$，而 $\dfrac{x_1-3}{x_1+1}=\dfrac{2-3}{2+1}=-\dfrac{1}{3}$

故数列 $\left\{\dfrac{x_n-3}{x_n+1}\right\}$ 是以 $-\dfrac{1}{3}$ 为首项以 $\dfrac{1}{5}$ 为公比的等比数列[来源:Z.xx.k.Com]

$\dfrac{x_n-3}{x_n+1}=-\dfrac{1}{3}\cdot(\dfrac{1}{5})^{n-1}$，故 $x_n=\dfrac{9\times 5^{n-1}-1}{3\times 5^{n-1}+1}=3-\dfrac{4}{3\times 5^{n-1}+1}$。

【命题意图】本试题主要考查了数列的通项公式以及函数与数列相结全的综合运用。先从函数入手，表示直线方程，从而得到交点坐标，再运用数学归纳法进行证明，根据递推公式构造等比数列进而求得数列的通基。

【点评】以函数为背景，引出点的坐标，并通过直线与坐标轴的交点得到数列的递推公式。既考查了直线方程，又考查了函数解析式，以及不等式的证明，试题比较综合，有一定的难度。做这类题那就是根据已知条件，一步一步的翻译为代数式，化简得到要找的关系式即可。

21.(2013.I.7) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, S_{m-1}=-2, S_m=0, S_{m+1}=3$，则 $m=$ (　　)

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

分析：C.

22.(2013.I.12) 设 $\Delta A_nB_nC_n$ 的三边长分别为 a_n,b_n,c_n，$\Delta A_nB_nC_n$ 的面积为 S_n，$n=1,2,3,\cdots$，若

$b_1>c_1, b_1+c_1=2a_1$，$a_{n+1}=a_n, b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2}, c_{n+1}=\dfrac{b_n+a_n}{2}$，则 (　　)

A.$\{S_n\}$为递减数列　　B.$\{S_n\}$为递增数列

C.$\{S_{2n-1}\}$为递增数列，$\{S_{2n}\}$为递减数列　　D.$\{S_{2n-1}\}$为递减数列，$\{S_{2n}\}$为递增数列

分析：B.

23.(2013.I.14) 若数列{ a_n }的前 n 项和为 $S_n=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$，则数列{ a_n }的通项公式是 $a_n=$______.

分析：$a_n=(-2)^{n-1}$.

24.(2013.II.3) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_3=a_2+10a_1$，$a_5=9$，则 $a_1=$ (　　)

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{9}$　　D. $-\dfrac{1}{9}$

分析：C.

25.(2013.II.16) 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_{10}=0, S_{15}=25$，则nS_n的最小值为____.

分析：-49.

26.(2014.I.17) 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中λ为常数.

（Ⅰ）证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$；

（Ⅱ）是否存在λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？并说明理由.

分析：（I）由题设，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1, a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$.

两式相减得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\lambda a_{n+1}$ 由于$a_{n+1}\neq 0$，所以 $a_{n+2}-a_n=\lambda$. ……6 分

（II）由题设，$a_1=1$，$a_1a_2=\lambda S_1-1$，可得$a_2=\lambda-1$. 由（I）知，$a_3=\lambda+1$.

令$2a_2=a_1+a_3$，解得$\lambda=4$. 故$a_{n+2}-a_n=4$，由此可得

$\{a_{2n-1}\}$是首项为 1，公差为 4 的等差数列，$a_{2n-1}=4n-3$；

$\{a_{2n}\}$是首项为 3，公差为 4 的等差数列，$a_{2n}=4n-1$. 所以$a_n=2n-1$，$a_{n-1}-a_n=2$.

因此存在$\lambda=4$，使得数列$\{a_n\}$为等差数列. ……12 分

27.(2014.II.17) 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$.

（Ⅰ）证明$\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

分析：（I）由$a_{n+1}=3a_n+1$得$a_{n+1}+\frac{1}{2}=3(a_n+\frac{1}{2})$。

又$a_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以$\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$是首项为$\frac{3}{2}$，公比为 3 的等比数列。

$a_n+\frac{1}{2}=\frac{3^n}{2}$，因此$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{3^n-1}{2}$.

（Ⅱ）由（I）知$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}$，因为当$n\geq 1$时，$3^n-1\geq 2\times 3^{n-1}$，所以$\frac{1}{3^n-1}\leq\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$。

于是$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\leq 1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^n})\prec\frac{3}{2}$。所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\prec\frac{3}{2}$

28.(2015.I.17) S_n 为数列{a_n}的前 n 项和.已知 a_n >0， $a_n^2+a_n=4S_n+3$.

（Ⅰ）求{a_n}的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$,求数列{b_n}的前 n 项和.

【答案】（Ⅰ） $2n+1$ （Ⅱ） $\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{4n+6}$

【解析】试题分析：（Ⅰ）先用数列第 n 项与前 n 项和的关系求出数列{a_n}的递推公式，可以判断数列{a_n}是等差数列，利用等差数列的通项公式即可写出数列{a_n}的通项公式；（Ⅱ）根据（Ⅰ）数列{b_n}的通项公式，再用拆项消去法求其前 n 项和.

试题解析：（Ⅰ）当 $n=1$ 时， $a_1^2+2a_1=4S_1+3=4a_1+3$，因为 $a_n>0$，所以 a_1=3，

当 $n\geq 2$ 时， $a_n^2+a_n-a_{n-1}^2-a_{n-1}=4S_n+3-4S_{n-1}-3=4a_n$，即 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=2(a_n+a_{n-1})$，因为 $a_n>0$，所以 a_n-a_{n-1}=2，

所以数列{a_n}是首项为 3，公差为 2 的等差数列，

所以 $a_n=2n+1$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知， $b_n=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})$，

所以数列{b_n}前 n 项和为 $b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{1}{2}[(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7})+\cdots+(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})]$ $=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{4n+6}$.

【考点定位】数列前 n 项和与第 n 项的关系；等差数列定义与通项公式；拆项消去法

【名师点睛】已知数列前 n 项和与第 n 项关系，求数列通项公式，常用 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\geq 2\end{cases}$ 将所给条件化为关于前 n 项和的递推关系或是关于第 n 项的递推关系，若满足等比数列或等差数列定义，用等比数列或等差数列通项公式求出数列的通项公式，否则适当变形构造等比或等数列求通项公式.

29.(2015.II.4) 已知等比数列$\{a_n\}$满足 a_1=3， $a_1+a_3+a_5$ =21，则 $a_3+a_5+a_7$ =(   )

A．21　　B．42　　C．63　　D．84

【答案】B

【解析】设等比数列公比为 q，则 $a_1+a_1q^2+a_1q^4=21$，又因为 $a_1=3$，所以 $q^4+q^2-6=0$，解得 $q^2=2$，所以 $a_3+a_5+a_7=(a_1+a_3+a_5)q^2=42$，故选 B.

【考点定位】等比数列通项公式和性质.

【名师点睛】本题考查等比数列的通项公式和性质，通过求等比数列的基本量，利用通项公式求解，若注意到项的序号之间的关系，则可减少运算量，属于基础题.

30.(2015.II.16) 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=-1$， $a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，则 $S_n=$________.

【答案】 $-\frac{1}{n}$

【解析】由已知得 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=S_{n+1}\cdot S_n$，两边同时除以 $S_{n+1}\cdot S_n$，得 $\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=-1$，故数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是以 -1 为首项，-1 为公差的等差数列，则 $\frac{1}{S_n}=-1-(n-1)=-n$，所以 $S_n=-\frac{1}{n}$.

【考点定位】等差数列和递推关系.

【名师点睛】本题考查数列递推式和等差数列通项公式，要搞清楚项 a_n 与 S_n 的关系，从而转化为 S_{n+1} 与 S_n 的递推式，并根据等差数列的定义判断 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列，属于中档题.