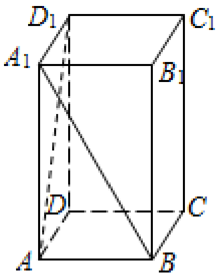
10 立体几何

湖南师大附中，数学教研组，张湘君

1.(2007.I.7) 如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为　　(　　　)



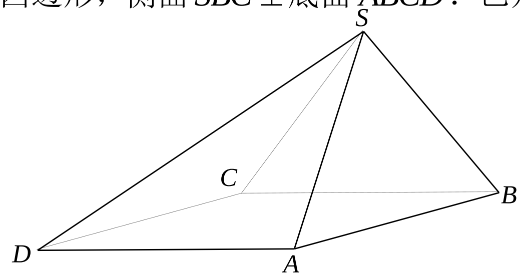
A．$\frac{1}{5}$　　　B．$\frac{2}{5}$　　　C．$\frac{3}{5}$　　　D．$\frac{4}{5}$

2.(2007.I.16) 一个等腰直角三角形的三个顶点分别在正三棱柱的三条侧棱上．已知正三棱柱的底面边长为 2，则该三角形的斜边长为___________．

3.(2007.I.19) 四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$．已知 $\angle ABC=45^\circ$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$SA=SB=\sqrt{3}$．

（Ⅰ）证明 $SA\perp BC$；

（Ⅱ）求直线 SD 与平面 SAB 所成角的大小．



4.(2007.II.7) 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长与底面边长相等，则 AB_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的正弦值等于　　(　　　)

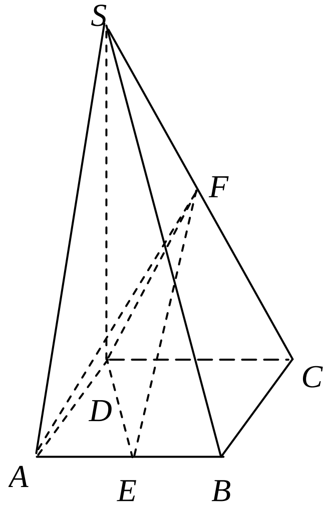
A．$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　　B．$\frac{\sqrt{10}}{4}$　　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.(2007.II.15) 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2cm 的球面上．如果正四棱柱的底面边长为 1cm，那么该棱柱的表面积为___________cm^2．

6.(2007.II.19) 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱 $SD\perp$ 底面 $ABCD$，E，F 分别为 AB，SC 的中点．

（1）证明 EF // 平面 SAD；

（2）设 $SD=2DC$，求二面角 $A-EF-D$ 的大小．

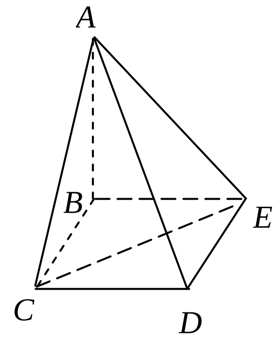


7.(2008.I.11) 已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱与底面边长都相等，A_1在底面ABC内的射影为$\triangle ABC$的中心，则AB_1与底面ABC所成角的正弦值等于 ( )

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

8.(2008.I.16) 等边三角形ABC与正方形$ABDE$有一公共边AB，二面角$C-AB-D$的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，M，N分别是AC，BC的中点，则EM，AN所成角的余弦值等于__________.

9.(2008.I.18) 四棱锥$A-BCDE$中，底面$BCDE$为矩形，侧面$ABC\perp$底面$BCDE$，$BC=2$，$CD=\sqrt{2}$，$AB=AC$.



（Ⅰ）证明：$AD\perp CE$；

（Ⅱ）设CE与平面ABE所成的角为45°，求二面角$C-AD-E$的大小.

10.(2008.II.10) 已知正四棱锥$S-ABCD$的侧棱长与底面边长都相等，E是SB的中点，则AE，SD所成的角的余弦值为 ( )

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

11.(2008.II.12) 已知球的半径为2，相互垂直的两个平面分别截球面得两个圆．若两圆的公共弦长为2，则两圆的圆心距等于 ( )

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

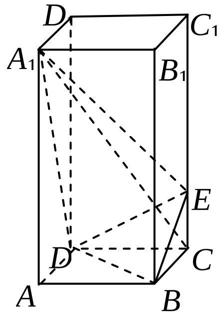
12.(2008.II.16) 平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有多个，如两组对边分别平行，类似地，写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件：

充要条件①____；

充要条件②____ .

（写出你认为正确的两个充要条件）

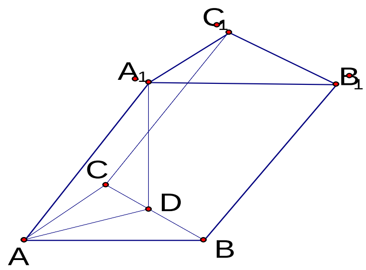
13.(2008.II.19) 如图，正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=2AB=4$，点E在CC_1上且$C_1E=3EC$.



（Ⅰ）证明：$A_1C\perp$平面BED；

（Ⅱ）求二面角A_1-DE-B的大小.

14.(2009.I.7) 已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱与底面边长都相等，A_1在底面ABC上的射影为BC的中点，则异面直线AB与CC_1所成的角的余弦值为 (　　)



A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

15.(2009.I.10) 已知二面角 α-l-β 为 60° ，动点 P、Q 分别在面 α、β 内，P 到 β 的距离为$\sqrt{3}$，Q 到 α 的距离为$2\sqrt{3}$，则 P、Q 两点之间距离的最小值为 (　　)

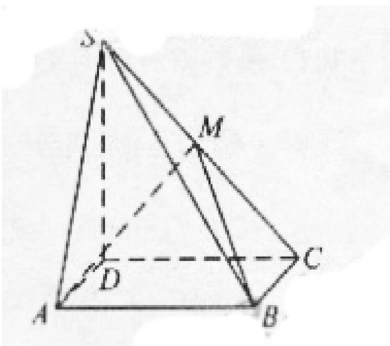
A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

16.(2009.I.15) 直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的各顶点都在同一球面上，若$AB=AC=AA_1=2$，$\angle BAC=120°$，则此球的表面积等于__________.

17.(2009.I.18) 如图，四棱锥$S-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$SD\perp$底面$ABCD$，$AD=\sqrt{2}$，$DC=SD=2$，点 M 在侧棱SC上，$\angle ABM=60°$.

（I）证明：M 在侧棱SC的中点;

（II）求二面角$S-AM-B$的大小.

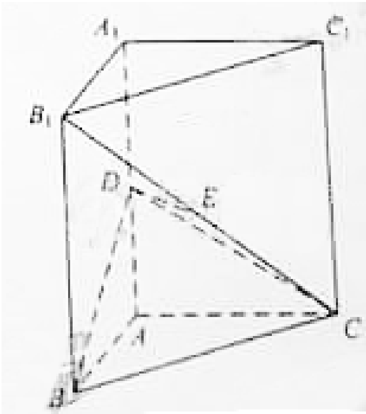


18.(2009.II.5) 已知正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=2AB, E$为AA_1中点，则异面直线BE与CD_1所成的角的余弦值为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　D. $\frac{3}{5}$

19.(2009.II.15) 设OA是球O的半径，M是OA的中点，过M且与OA成45°角的平面截球O的表面得到圆C。若圆C的面积等于$\frac{7\pi}{4}$，则球O的表面积等于___________.

20.(2009.II.18) 如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC, D$、E分别为AA_1、B_1C的中点，$DE\perp$平面BCC_1



（I）证明：$AB=AC$

（II）设二面角$A-BD-C$为60°，求B_1C与平面BCD所成的角的大小。

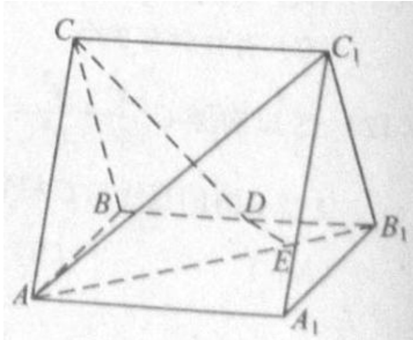
21.(2010.I.7) 正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，BB_1与平面 ACD_1所成角的余弦值为(　　)

A $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C $\frac{2}{3}$　　D $\frac{\sqrt{6}}{3}$

22.(2010.I.12) 已知在半径为 2 的球面上有 A、B、C、D 四点，若 AB=CD=2,则四面体 ABCD 的体积的最大值为 (　　)

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

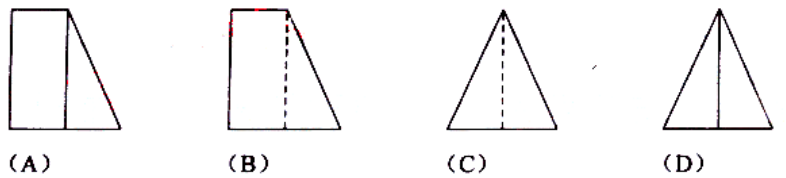
23.(2010.I.19) 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC$，$AA_1=AB$，D 为 BB_1 的中点，E 为 AB_1 上的一点，$AE=3EB_1$．

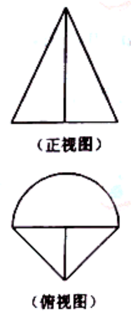


（Ⅰ）证明：DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线；

（Ⅱ）设异面直线 AB_1 与 CD 的夹角为 45°，求二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的大小．

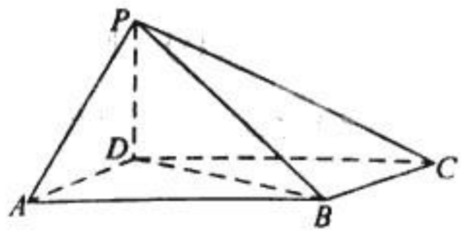
24.(2011.I.6) 在一个几何体的三视图中，正视图和俯视图如右图所示，则相应的侧视图可以为　　　　　　　　(　　　)





25.(2011.I.15) 已知矩形 $ABCD$ 的顶点都在半径为 4 的球 O 的球面上，且 $AB=6, BC=2\sqrt{3}$,则棱锥 $O-ABCD$ 的体积为__________.

26.(2011.I.18) 如图，四棱锥 *P-ABCD* 中，底面 *ABCD* 为平行四边形，∠DAB=60°,AB=2*AD*,*PD*⊥底面 *ABCD*.



(Ⅰ) 证明：*PA*⊥*BD*;

(Ⅱ) 若 *PD*=*AD*，求二面角 *A-PB-C* 的余弦值。

27.已知直二面角 $\alpha-l-\beta$,点 $A\in\alpha$，$AC\perp l$, C 为垂足, $B\in\beta$，$BD\perp l$, D 为垂足．若 $AB=2, AC=BD=1$，则 D 到平面 ABC 的距离等于　　　　(　　　)

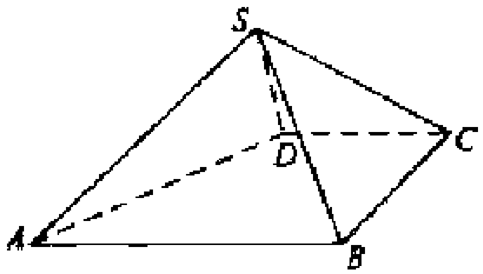
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　　D. 1

28.(2011.II.11) 已知平面 α 截一球面得圆 M，过圆心 M 且与 α 成 60^0 二面角的平面 β 截该球面得圆 N.若该球面的半径为 4，圆 M 的面积为 4π，则圆 N 的面积为 (   )

A. 7π　　B. 9π　　C. 11π　　D. 13π

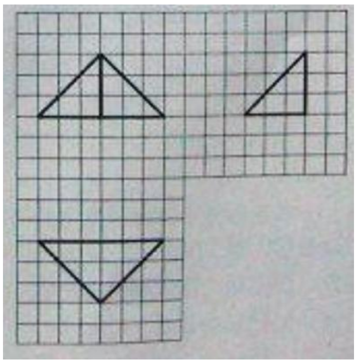
29.(2011.II.16) 已知点 E、F 分别在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1、CC_1 上，且 $B_1E=2EB, CF=2FC_1$，则面 AEF 与面 ABC 所成的二面角的正切值等于______.

30.(2011.II.19) 如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，$AB//CD, BC\perp CD$，侧面 SAB 为等边三角形，$AB=BC=2, CD=SD=1$.



(Ⅰ) 证明：$SD\perp$ 平面 SAB；

(Ⅱ) 求 AB 与平面 SBC 所成角的大小.



31.(2012.I.7) 如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗线画出的是某几何体的三视图，则此几何体的体积为 (   )

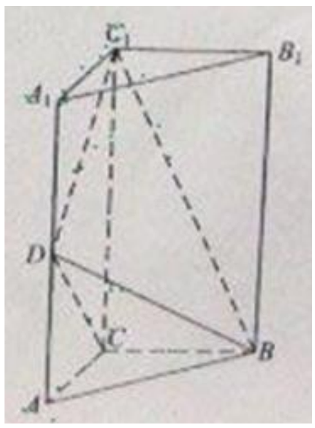
(A) 6　　(B) 9

(C) 12　　(D) 18

32.(2012.I.11) 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，ΔABC 是边长为1的正三角形，SC 为球 O 的直径，且 $SC=2$；则此棱锥的体积为 (   )

(A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

33.(2012.I.19) 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=\frac{1}{2}AA_1$，D 是棱 AA_1 的中点，$DC_1\perp BD$



（1）证明：$DC_1\perp BC$

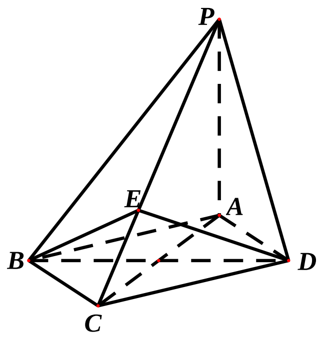
（2）求二面角 A_1-BD-C_1 的大小。

34.(2012.II.4) 已知正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2, CC_1=2\sqrt{2}, E$为CC_1的中点，则直线AC_1 与平面BED的距离为 ( )

A．2 B．$\sqrt{3}$ C．$\sqrt{2}$ D．1

35.(2012.II.16) 三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，底面边长和侧棱长都相等，$\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$，则异面直线$AB_1$与$BC_1$所成角的余弦值为__________.

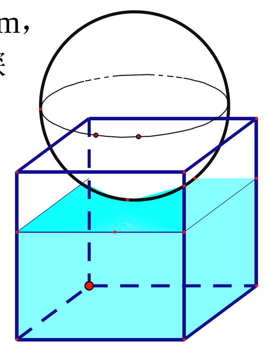
36.(2012.II.18) 如图，四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为菱形，$PA\perp$底面$ABCD$，$AC=2\sqrt{2}$，$PA=2, E$是PC上的一点，$PE=2EC$。



（1）证明：$PC\perp$平面BED；

（2）设二面角$A-PB-C$为90°，求PD与平面PBC所成角的大小。

37.(2013.I.6) 如图，有一个水平放置的透明无盖的正方体容器，容器高 8cm，将一个球放在容器口，再向容器内注水，当球面恰好接触水面时测得水深为 6cm，如果不计容器的厚度，则球的体积为 ( )



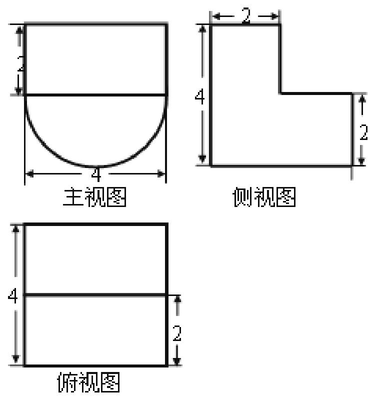
A. $\dfrac{500\pi}{3}cm^3$ B. $\dfrac{866\pi}{3}cm^3$

C. $\dfrac{1372\pi}{3}cm^3$ D. $\dfrac{2048\pi}{3}cm^3$

38.(2013.I.8) 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为( )

A．$16+8\pi$ B．$8+8\pi$

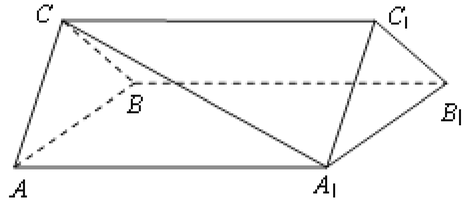
C．$16+16\pi$ D．$8+16\pi$



39.(2013.I.18) 如图，三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，CA=CB，$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60°$.

（Ⅰ）证明 $AB\perp A_1C$;

（Ⅱ）若平面 ABC⊥平面 AA_1B_1B，AB=CB=2，求直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值。



40.(2013.II.4) 已知 m,n 为异面直线，$m\perp$ 平面 α，$n\perp$ 平面 β。直线 l 满足

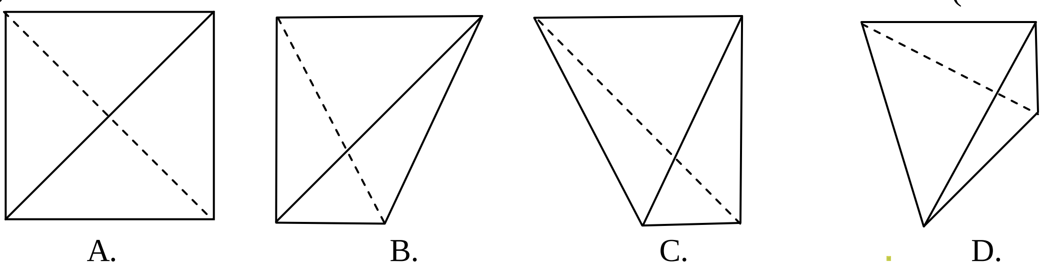
$l\perp m, l\perp n, l\not\subset\alpha, l\not\subset\beta$，则 ( )

A. $\alpha // \beta$，且 $l // \alpha$　　B. $\alpha\perp\beta$，且 $l\perp\beta$

C. α 与 β 相交，且交线垂直于 l　　D. α 与 β 相交，且交线平行于 l

41.(2013.II.7) 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是

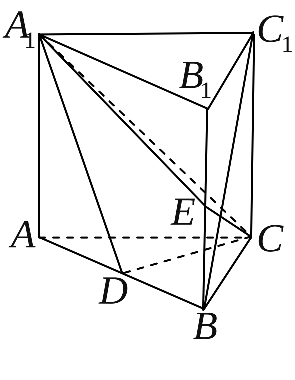
$(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(0,0,0)$，画该四面体三视图中的正视图时，以 zOx 平面为投影面，则得到正视图可以为 ( )



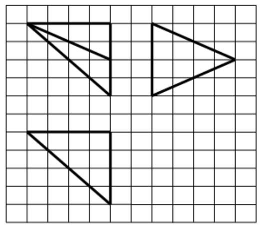
42.(2013.II.18) 如图，直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,E 分别是 AB,BB_1 的中点，$AA_1=AC=CB=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$.

（Ⅰ）证明：$BC_1 //$ 平面 A_1CD；

（Ⅱ）求二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值.



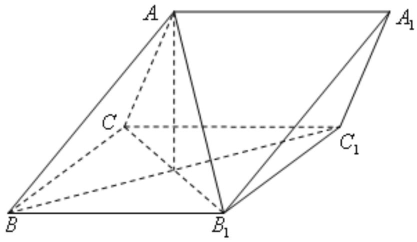
43.(2014.I.12) 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的个条棱中，最长的棱的长度为(　　　)



$A.6\sqrt{2}$　　　　　　　　　　$B.4\sqrt{2}$

$C.6$　　　　　　　　　　　　$D.4$

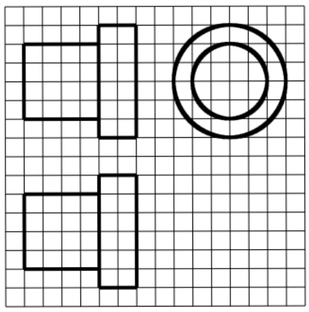
44.(2014.I.19) 如图三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，$AB\perp B_1C$.



（Ⅰ）证明：$AC=AB_1$；

（Ⅱ）若 $AC\perp AB_1$，$\angle CBB_1=60^{\circ}$，AB=Bc，求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值.

45.(2014.II.6) 如图，网格纸上正方形小格的边长为 1（表示 1cm），图中粗线画出的是某零件的三视图，该零件由一个底面半径为 3cm，高为 6cm 的圆柱体毛坯切削得到，则切削掉部分的体积与原来毛坯体积的比值为　　　　　　　　　　(　　　)



A. $\frac{17}{27}$　　　B. $\frac{5}{9}$　　　C. $\frac{10}{27}$　　　D. $\frac{1}{3}$

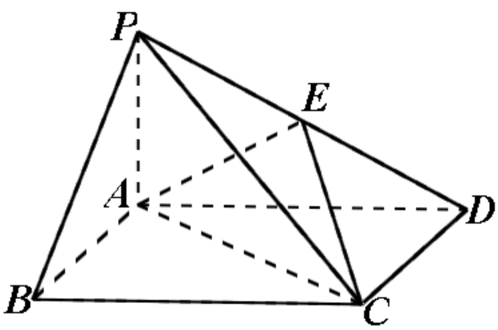
46.(2014.II.11) 直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，∠BCA=90°，M，N 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点，BC=CA=CC_1，则 BM 与 AN 所成的角的余弦值为　(　　　)

A. $\frac{1}{10}$　　　B. $\frac{2}{5}$　　　C. $\frac{\sqrt{30}}{10}$　　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

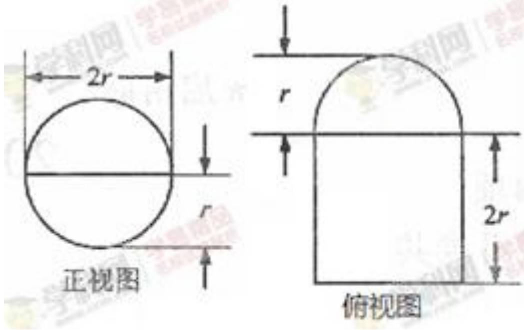
47.(2014.II.18) 如图，四棱锥 P-ABCD 中，底面 ABCD 为矩形，PA⊥平面 ABCD，E 为 PD 的中点.

（Ⅰ）证明：PB∥平面 AEC；

（Ⅱ）设二面角 D-AE-C 为 60°，AP=1，AD=$\sqrt{3}$，求三棱锥 E-ACD 的体积.



48.(2015.I.11) 圆柱被一个平面截去一部分后与半球(半径为 r)组成一个几何体，该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示.若该几何体的表面积为 $16+20\pi$，则 r= ( )

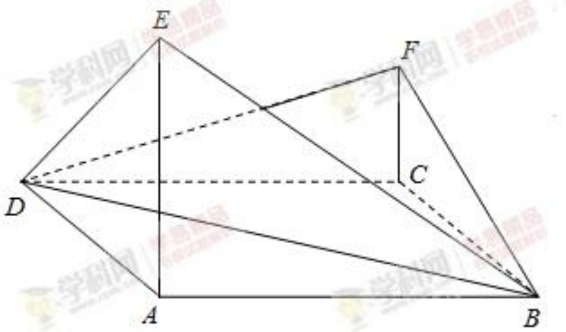


A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

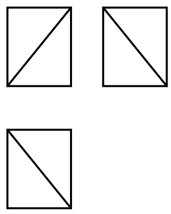
49.(2015.I.18) 如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC$=120°, E, F 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点，$BE\perp$平面 $ABCD$，$DF\perp$平面 $ABCD$，BE=2DF，$AE\perp EC$.

（Ⅰ）证明：平面 $AEC\perp$平面 AFC;

（Ⅱ）求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值.



50.(2015.II.6) 一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如右图，则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 ( )



A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{7}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{5}$

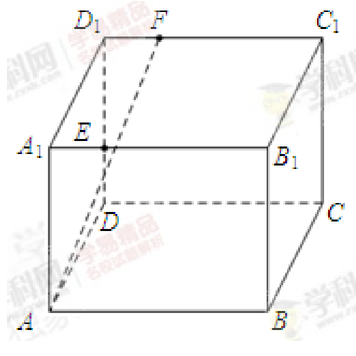
51.(2015.II.9) 已知 A,B 是球 O 的球面上两点，∠AOB=90,C 为该球面上的动点，若三棱锥 O-ABC 体积的最大值为 36，则球 O 的表面积为 ( )

A. 36π　　B.64π　　C.144π　　D.256π

52.(2015.II.19) 如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, AB=16，BC=10，$AA_1=8$，点 E，F 分别在 A_1B_1，C_1D_1 上，$A_1E=D_1F=4$．过点 E，F 的平面 α 与此长方体的面相交，交线围成一个正方形.

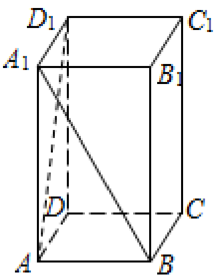
（Ⅰ）在图中画出这个正方形（不必说出画法和理由）；

（Ⅱ）求直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值.



10 立体几何

湖南师大附中，数学教研组，张湘君



1.(2007.I.7) 如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 ( )

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

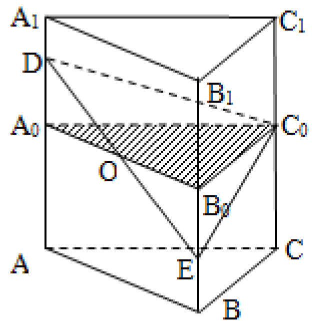
分析：（综合法）不妨设 AB=1，则 $A_1A=2$，连结 BC_1，A_1C_1，则 $AD_1 // BC_1$，$\angle A_1BC_1$ 为所求异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角．在 $\triangle A_1BC_1$ 中，$A_1B=BC_1=\sqrt{5}$，$A_1C_1=\sqrt{2}$，

$\cos\angle A_1BC_1=\frac{5+5-2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$． 选 D．

（坐标法）不妨设 AB=1，则 $A_1A=2$，以 A 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D_1(0,1,2)$，$\overrightarrow{AD_1}=(0,1,2)$，$A_1(0,0,2)$，$B(1,0,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-2)$．

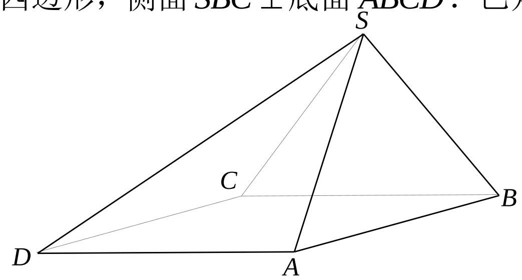
$\cos<\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{A_1B}>=\frac{\overrightarrow{AD_1}\bullet\overrightarrow{A_1B}}{|\overrightarrow{AD_1}||\overrightarrow{A_1B}|}=\frac{-4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=-\frac{4}{5}$，∴ A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 $\frac{4}{5}$，选 D．

2.(2007.I.16) 一个等腰直角三角形的三个顶点分别在正三棱柱的三条侧棱上．已知正三棱柱的底面边长为 2，则该三角形的斜边长为____________．



分析：填 $2\sqrt{3}$．如图，作正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面 $A_0B_0C_0$，取 B_0C_0 的中点 O，过 O 作直线 DE，分别交 AA_1、BB_1 于 D、E 两点连结 C_0D、C_0E，则三角形 C_0DE 为等腰三角形，若三角形 C_0DE 仍为直角三角形，设 $B_0E=x$，应有 $DE^2=2C_0{}^2$，即 $2(4+x^2)=4(1+x^2)$，解得 $x=\sqrt{2}$，这样 $DE=\sqrt{4(1+x^2)}=2\sqrt{3}$，即等腰直角三角形 C_0DE 斜边长为 $2\sqrt{3}$．

3.(2007.I.19) 四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$．已知 $\angle ABC=45^\circ$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$SA=SB=\sqrt{3}$．

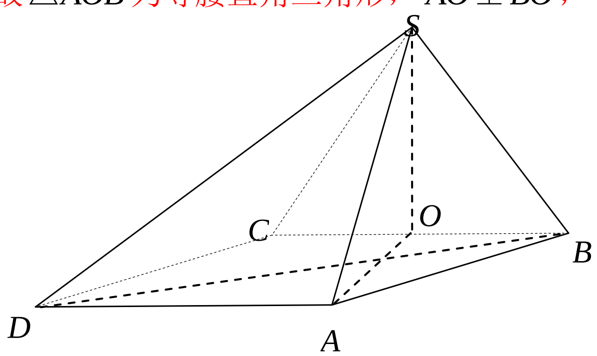


（Ⅰ）证明 $SA\perp BC$；

（Ⅱ）求直线 SD 与平面 SAB 所成角的大小．

分析：解法一：

（Ⅰ）作 $SO\perp BC$，垂足为 O，连结 AO，由侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$，得 $SO\perp$ 底面 $ABCD$．因为 $SA=SB$，所以 $AO=BO$，又 $\angle ABC=45^\circ$，故 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，$AO\perp BO$，由三垂线定理，得 $SA\perp BC$．



（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $SA\perp BC$，依题设 $AD // BC$，

故 $SA\perp AD$，由 $AD=BC=2\sqrt{2}$， $SA=\sqrt{3}$， $AO=\sqrt{2}$，得 $SO=1$， $SD=\sqrt{11}$．

$\triangle SAB$ 的面积 $S_1=\frac{1}{2}AB\bullet\sqrt{SA^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=\sqrt{2}$．

连结 DB，得 $\triangle DAB$ 的面积 $S_2=\frac{1}{2}AB\bullet AD\sin 135^\circ=2$

设 D 到平面 SAB 的距离为 h，由于 $V_{D-SAB}=V_{S-ABD}$，得 $\frac{1}{3}h\bullet S_1=\frac{1}{3}SO\bullet S_2$，解得 $h=\sqrt{2}$．

设 SD 与平面 SAB 所成角为 α，则 $\sin\alpha=\frac{h}{SD}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{22}}{11}$．

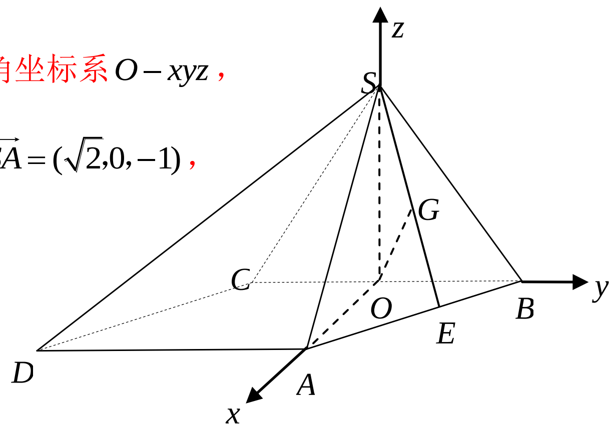
所以，直线 SD 与平面 SBC 所成的我为 $\arcsin\frac{\sqrt{22}}{11}$．

解法二：

（Ⅰ）作 $SO\perp BC$，垂足为 O，连结 AO，由侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$，得 $SO\perp$ 平面 $ABCD$．

因为 $SA=SB$，所以 $AO=BO$．又 $\angle ABC=45^\circ$， $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形， $AO\perp OB$．

如图，以 O 为坐标原点， OA 为 x 轴正向，建立直角坐标系 $O-xyz$，



$A(\sqrt{2},0,0)$， $B(0,\sqrt{2},0)$， $C(0,-\sqrt{2},0)$， $S(0,0,1)$， $\overrightarrow{SA}=(\sqrt{2},0,-1)$，

$\overrightarrow{CB}=(0,2\sqrt{2},0)$， $\overrightarrow{SA}\bullet\overrightarrow{CB}=0$，所以 $SA\perp BC$．

（Ⅱ）取 AB 中点 E， $E\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，

连结 SE，取 SE 中点 G，连结 OG， $G\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right)$． $\overline{OG}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right)$， $\overline{SE}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，

$\overline{AB}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$． $\overline{SE}\bullet\overline{OG}=0$， $\overline{AB}\bullet\overline{OG}=0$， OG 与平面 SAB 内两条相交直线 SE， AB 垂直．

所以 $OG\perp$ 平面 SAB， $\overline{OG}$ 与 $\overline{DS}$ 的夹角记为 α， SD 与平面 SAB 所成的角记为 β，则 α 与 β 互余． $D(\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$， $\overline{DS}=(-\sqrt{2},2\sqrt{2},1)$． $\cos\alpha=\frac{\overline{OG}\bullet\overline{DS}}{|\overline{OG}|\bullet|\overline{DS}|}=\frac{\sqrt{22}}{11}$， $\sin\beta=\frac{\sqrt{22}}{11}$，

所以，直线 SD 与平面 SAB 所成的角为 $\arcsin\frac{\sqrt{22}}{11}$．

4.(2007.II.7) 已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱长与底面边长相等，则AB_1与侧面ACC_1A_1所成角的正弦值等于 (　　)

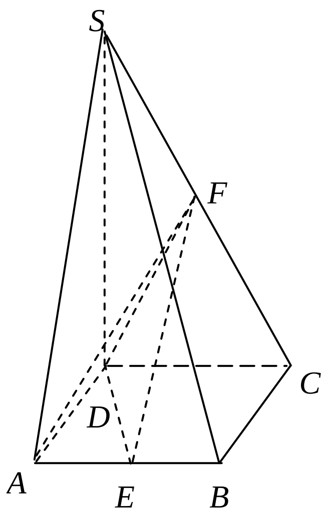
A．$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

分析：A.

5.(2007.II.15) 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为2cm的球面上．如果正四棱柱的底面边长为1cm，那么该棱柱的表面积为___________cm^2．

分析：$2+4\sqrt{2}$．

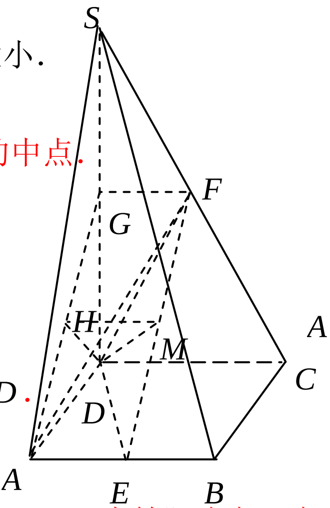
6.(2007.II.19) 如图，在四棱锥$S-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，侧棱$SD\perp$底面$ABCD$，E，F分别为AB，SC的中点．



（1）证明EF∥平面SAD；

（2）设$SD=2DC$，求二面角$A-EF-D$的大小．

分析：解法一：



（1）作$FG\parallel DC$交SD于点G，则G为SD的中点．

连结AG，$FG \underline{\underline{\parallel}} \dfrac{1}{2}CD$，又$CD \underline{\underline{\parallel}} AB$，

故$FG \underline{\underline{\parallel}} AE$，$AEFG$为平行四边形．

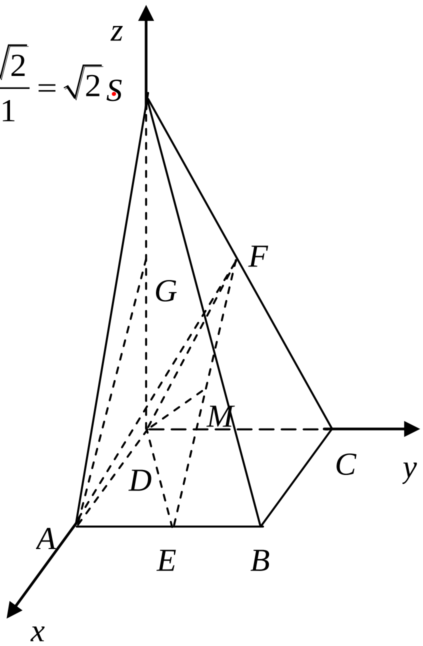
$EF\parallel AG$，又$AG\subset$平面SAD，$EF\not\subset$平面SAD．

所以EF∥平面SAD．

（2）不妨设$DC=2$，则$SD=4$，$DG=2$，$\triangle ADG$为等腰直角三角形．取AG中点H，连结DH，则$DH\perp AG$．又$AB\perp$平面SAD，所以$AB\perp DH$，而$AB\cap AG=A$，

所以$DH\perp$面AEF．取EF中点M，连结MH，则$HM\perp EF$．连结DM，则$DM\perp EF$．

故$\angle DMH$为二面角$A-EF-D$的平面角$\tan\angle DMH=\dfrac{DH}{HM}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$



所以二面角$A-EF-D$的大小为$\arctan\sqrt{2}$．

解法二：（1）如图，建立空间直角坐标系$D-xyz$．

设$A(a,0,0)$，$S(0,0,b)$，则$B(a,a,0)$，$C(0,a,0)$，

$E\left(a,\dfrac{a}{2},0\right)$，$F\left(0,\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(-a,0,\dfrac{b}{2}\right)$．

取 SD 的中点 $G\left(0,0,\frac{b}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AG}=\left(-a,0,\frac{b}{2}\right)$.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AG}$，$EF\ //\ AG$，$AG\subset$平面 SAD，$EF\not\subset$平面 SAD，所以 $EF\ //$平面 SAD.

（2）不妨设 $A(1,0,0)$，则 $B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$S(0,0,2)$，$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

EF 中点 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{MD}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{EF}=0$，$MD\perp EF$

又 $\overrightarrow{EA}=\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{EA}\bullet\overrightarrow{EF}=0$，$EA\perp EF$，所以向量 $\overrightarrow{MD}$ 和 $\overrightarrow{EA}$ 的夹角等于二面角 $A-EF-D$ 的平面角. $\cos<\overrightarrow{MD},\overrightarrow{EA}>=\frac{\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{EA}}{|\overrightarrow{MD}|\bullet|\overrightarrow{EA}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 所以二面角 $A-EF-D$ 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7.(2008.I.11) 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等，A_1 在底面 ABC 内的射影为 $\triangle ABC$ 的中心，则 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值等于（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

分析：C. 由题意知三棱锥 A_1-ABC 为正四面体，设棱长为 a，则 $AB_1=\sqrt{3}a$，棱柱的高 $A_1O=\sqrt{a^2-AO^2}=\sqrt{a^2-(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$（即点 B_1 到底面 ABC 的距离），故 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{A_1O}{AB_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

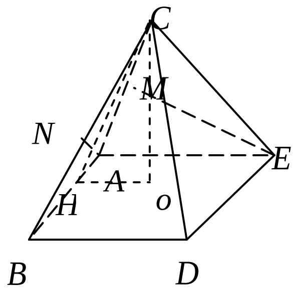
另解：设 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}$ 为空间向量的一组基底，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}$ 的两两间的夹角为 60^0

长度均为 a，平面 ABC 的法向量为 $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}$

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\frac{2}{3}a^2,|\overrightarrow{OA_1}|=\frac{\sqrt{6}}{3},|\overrightarrow{AB_1}|=\sqrt{3}$，则 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{|\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}|}{|A_1O||\overrightarrow{AB_1}|}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

8.(2008.I.16) 等边三角形 ABC 与正方形 $ABDE$ 有一公共边 AB，二面角 $C-AB-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，M，N 分别是 AC，BC 的中点，则 EM，AN 所成角的余弦值等于__________.

分析：$\frac{1}{6}$.设 $AB=2$，作 $CO\perp$面$ABDE$，



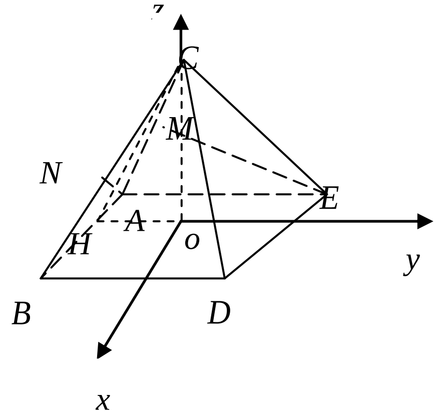
$OH\perp AB$，则 $CH\perp AB$，$\angle CHO$为二面角 $C-AB-D$ 的平面角

$CH=\sqrt{3}, OH=CH\cdot\cos\angle CHO=1$，结合等边三角形 ABC

与正方形 $ABDE$ 可知此四棱锥为正四棱锥，则 $AN=EM=CH=\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}), \overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}$

故 EM，AN 所成角的余弦值 $\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{EM}}{|\overrightarrow{AN}||\overrightarrow{EM}|}=\frac{1}{6}$



另解：以 O 为坐标原点，建立如图所示的直角坐标系，

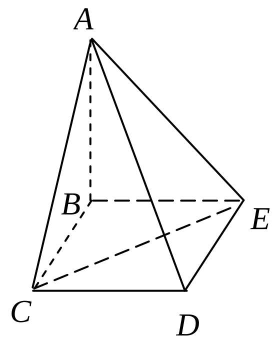
则点 $A(-1,-1,0), B(1,-1,0), E(-1,1,0), C(0,0,\sqrt{2})$，

$M(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}), N(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，

则 $\overrightarrow{AN}=(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}), \overrightarrow{EM}=(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}), \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}, |\overrightarrow{AN}|=|\overrightarrow{EM}|=\sqrt{3}$，

故 EM，AN 所成角的余弦值 $\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{EM}}{|\overrightarrow{AN}||\overrightarrow{EM}|}=\frac{1}{6}$.

9.(2008.I.18) 四棱锥 $A-BCDE$ 中，底面 $BCDE$ 为矩形，



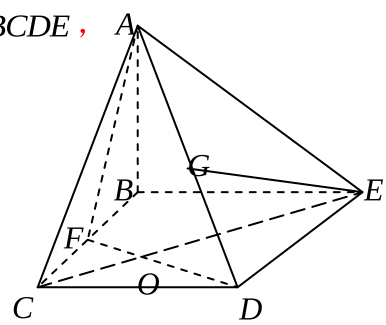
侧面 $ABC\perp$底面 $BCDE$，$BC=2$，$CD=\sqrt{2}$，$AB=AC$.

（Ⅰ）证明：$AD\perp CE$；

（Ⅱ）设 CE 与平面 ABE 所成的角为 45°，求二面角 $C-AD-E$ 的大小.

分析：（1）取 BC 中点 F，连接 DF 交 CE 于点 O，

$\because AB=AC$，$\therefore AF\perp BC$，又面 $ABC\perp$面 $BCDE$，$\therefore AF\perp$面 $BCDE$，



$\therefore AF\perp CE$. $\tan\angle CED=\tan\angle FDC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \angle OED+\angle ODE=90^\circ$，$\therefore \angle DOE=90^\circ$，即 $CE\perp DF$，

$\therefore CE\perp$面 ADF，$\therefore CE\perp AD$.

（2）在面 ACD 内过 C 点作 AD 的垂线，垂足为 G.

$\because CG\perp AD$，$CE\perp AD$，$\therefore AD\perp$面 CEG，$\therefore EG\perp AD$，

则 $\angle CGE$ 即为所求二面角的平面角．

$$CG=\frac{AC\bullet CD}{AD}=\frac{2\sqrt{3}}{3}，\quad DG=\frac{\sqrt{6}}{3}，\quad EG=\sqrt{DE^2-DG^2}=\frac{\sqrt{30}}{3}，$$

$CE=\sqrt{6}$，则 $\cos\angle CGE=\dfrac{CG^2+GE^2-CE^2}{2CG\bullet GE}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \angle CGE=\pi-\arccos\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$，即二面角 $C-AD-E$ 的大小 $\pi-\arccos\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$．

10.(2008.II.10) 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长与底面边长都相等，E 是 SB 的中点，则 AE，SD 所成的角的余弦值为 ( )

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

分析：**C**

【解析】连接 AC、BD 交于 O，连接 OE，因 OE∥SD.所以∠AEO 为所求。设侧棱长与底面边长都等于 2，则在⊿AEO 中，OE＝1,AO＝$\sqrt{2}$，AE=$\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$，

于是 $\cos\angle AEO=\dfrac{(\sqrt{3})^2+1^2-(\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{3}\times 1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11.(2008.II.12) 已知球的半径为 2，相互垂直的两个平面分别截球面得两个圆．若两圆的公共弦长为 2，则两圆的圆心距等于 ( )

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

分析：**C**

【解析】设两圆的圆心分别为 O_1、O_2，球心为 O，公共弦为 AB，其中点为 E，则 OO_1EO_2 为矩形，于是对角线 $O_1O_2=OE$，而 $OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，∴ $O_1O_2=\sqrt{3}$

【高考考点】球的有关概念，两平面垂直的性质

12.(2008.II.16) 平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有多个，如两组对边分别平行，类似地，写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件：

充要条件①____；

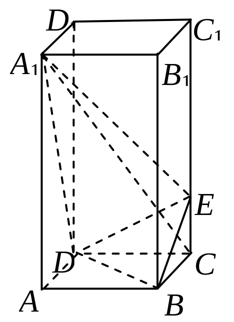
充要条件②____ ．

（写出你认为正确的两个充要条件）

分析：两组相对侧面分别平行；一组相对侧面平行且全等；对角线交于一点；底面是平行四边形．注：上面给出了四个充要条件．如果考生写出其他正确答案，同样给分．

13.(2008.II.19) 如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB=4$，

点 E 在 CC_1 上且 $C_1E=3EC$．



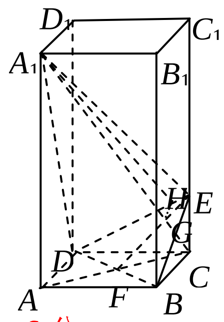
（Ⅰ）证明：$A_1C\perp$ 平面 BED；

（Ⅱ）求二面角 A_1-DE-B 的大小．

分析：解法一：依题设知 $AB=2$，$CE=1$．

（Ⅰ）连结 AC 交 BD 于点 F，则 $BD\perp AC$．

由三垂线定理知，$BD\perp A_1C$． ……………………………………………………3 分



在平面 A_1CA 内，连结 EF 交 A_1C 于点 G，由于 $\dfrac{AA_1}{FC}=\dfrac{AC}{CE}=2\sqrt{2}$，

故 $\mathrm{Rt}\triangle A_1AC\backsim\mathrm{Rt}\triangle FCE$，$\angle AA_1C=\angle CFE$，$\angle CFE$ 与 $\angle FCA_1$ 互余．

于是 $A_1C\perp EF$． A_1C 与平面 BED 内两条相交直线 BD，EF 都垂直，

所以 $A_1C\perp$ 平面 BED． ……………………………………………………………6 分

（Ⅱ）作 $GH\perp DE$，垂足为 H，连结 A_1H．由三垂线定理知 $A_1H\perp DE$，

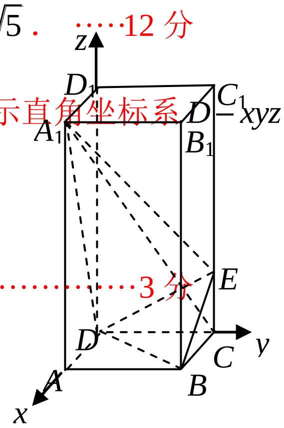
故 $\angle A_1HG$ 是二面角 A_1-DE-B 的平面角． ………………………………………8 分

$EF=\sqrt{CF^2+CE^2}=\sqrt{3}$，$CG=\dfrac{CE\times CF}{EF}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$EG=\sqrt{CE^2-CG^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

$\dfrac{EG}{EF}=\dfrac{1}{3}$，$GH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{EF\times FD}{DE}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$．又 $A_1C=\sqrt{AA_1^2+AC^2}=2\sqrt{6}$，$A_1G=A_1C-CG=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$．

$\tan\angle A_1HG=\dfrac{A_1G}{HG}=5\sqrt{5}$．所以二面角 A_1-DE-B 的大小为 $\arctan 5\sqrt{5}$． ……12 分

解法二：以 D 为坐标原点，射线 DA 为 x 轴的正半轴，建立如图所示直角坐标系 $D-xyz$．



依题设，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$E(0,2,1)$，$A_1(2,0,4)$．

$\overrightarrow{DE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(-2,2,-4)$，$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,4)$． …………………3 分

（Ⅰ）因为 $\overrightarrow{A_1C}\bullet\overrightarrow{DB}=0$，$\overrightarrow{A_1C}\bullet\overrightarrow{DE}=0$，

故 $A_1C\perp BD$，$A_1C\perp DE$．又 $DB\cap DE=D$，所以 $A_1C\perp$ 平面 DBE． ………6 分

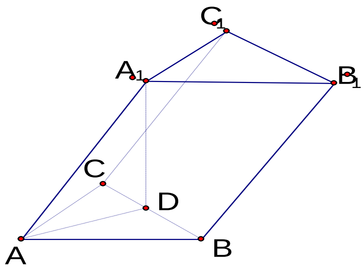
（Ⅱ）设向量$\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$是平面$DA_1E$的法向量，则$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DE}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DA_1}$.

故$2y+z=0$，$2x+4z=0$．令$y=1$，则$z=-2$，$x=4$，$\boldsymbol{n}=(4,1,-2)$． ……9 分

$\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1C}\rangle$等于二面角$A_1-DE-B$的平面角，$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1C}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{A_1C}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{A_1C}|}=\dfrac{\sqrt{14}}{42}$．

所以二面角A_1-DE-B的大小为$\arccos\dfrac{\sqrt{14}}{42}$． ………………………………12 分

14.(2009.I.7) 已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱与底面边长都相等，A_1在底面ABC上的射影为BC的中点，则异面直线AB与CC_1所成的角的余弦值为 (   )



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

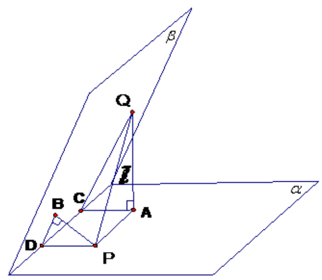
分析：D. 设BC的中点为 D，连结A_1D，AD，易知$\theta=\angle A_1AB$即为异面直线AB与CC_1所成的角,由三角余弦定理，易知$\cos\theta=\cos\angle A_1AD\cdot\cos\angle DAB=\dfrac{AD}{A_1A}\cdot\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{3}{4}$.

15.(2009.I.10) 已知二面角 α-l-β 为60°，动点 P、Q 分别在面 α、β 内，P 到 β 的距离为$\sqrt{3}$，Q 到 α 的距离为$2\sqrt{3}$，则 P、Q 两点之间距离的最小值为 (   )

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

分析：C. 如图分别作$QA\perp\alpha$于A, $AC\perp l$于C, $PB\perp\beta$于B,

$PD\perp l$于D，连CQ, BD 则$\angle ACQ=\angle PBD=60^\circ$, $AQ=2\sqrt{3}$, $BP=\sqrt{3}$，



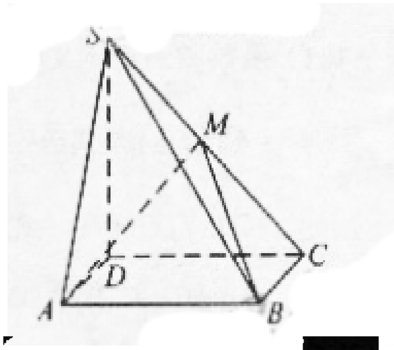
$\therefore AC=PD=2$ 又$\because PQ=\sqrt{AQ^2+AP^2}=\sqrt{12+AP^2}\ge2\sqrt{3}$

当且仅当$AP=0$，即点A与点P重合时取最小值.

16.(2009.I.15) 直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的各顶点都在同一球面上，若$AB=AC=AA_1=2$，$\angle BAC=120^\circ$，则此球的表面积等于__________.

分析：在ΔABC中$AB=AC=2$, $\angle BAC=120^\circ$,可得$BC=2\sqrt{3}$,由正弦定理得ΔABC外接圆半径 r=2,设此圆圆心为O'，球心为O，在$RT\Delta OBO'$中得球半径$R=\sqrt{5}$，S=$4\pi R^2=20\pi$.

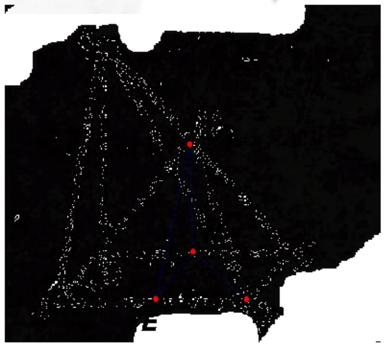
17.(2009.I.18) 如图，四棱锥$S-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$SD\perp$底面$ABCD$，$AD=\sqrt{2}$，$DC=SD=2$，点 M 在侧棱SC上，$\angle ABM=60°$.



（I）证明：M 在侧棱SC的中点;

（II）求二面角$S-AM-B$的大小.

分析：（I）解法一：作$MN\ //\ SD$交CD于 N，作$NE\perp AB$交AB于 E，连 ME、NB，则$MN\perp$面$ABCD$，



$ME\perp AB$，$NE=AD=\sqrt{2}$，设$MN=x$，则$NC=EB=x$，

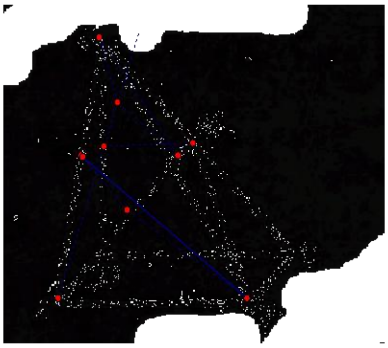
在$RT\Delta MEB$中，$\because\ \angle MBE=60°\ \therefore ME=\sqrt{3}x$。

在$RT\Delta MNE$中由$ME^2=NE^2+MN^2\ \therefore 3x^2=x^2+2$

解得$x=1$，从而$MN=\frac{1}{2}SD\ \therefore$ M 为侧棱SC的中点 M.

解法二:过M作CD的平行线.解法三:利用向量处理. 详细可见 09 年高考参考答案.

（II）**分析一:**利用三垂线定理求解。在新教材中弱化了三垂线定理。这两年高考中求二面角也基本上不用三垂线定理的方法求作二面角。



过M作$MJ\ //\ CD$交SD于J,作$SH\perp AJ$交AJ于H,作$HK\perp AM$交AM于K,则$JM\ //\ CD$, $JM\perp$面SAD,面$SAD\perp$面MBA, $SH\perp$面$AMB\ \therefore \angle SKH$即为所求二面角的补角.

分析二:利用二面角的定义。在等边三角形ABM中过点B作$BF\perp AM$交AM于点F，则点F为 AM 的中点，取 SA 的中点 G，连 GF，易证$GF\perp AM$，则$\angle GFB$即为所求二面角.

分析三:利用空间向量求。在两个半平面内分别与交线 AM 垂直的两个向量的夹角即可。

另外：利用射影面积或利用等体积法求点到面的距离等等，这些方法也能奏效。

总之在目前，立体几何中的两种主要的处理方法：传统方法与向量的方法仍处于各自半壁江山的状况。命题人在这里一定会照顾双方的利益。

18.(2009.II.5) 已知正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=2AB$, E为AA_1中点，则异面直线BE与CD_1所成的角的余弦值为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　D. $\frac{3}{5}$

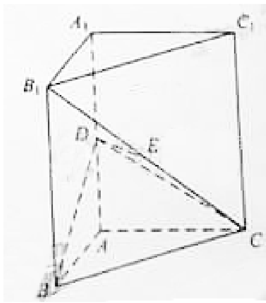
分析：令 $AB=1$ 则 $AA_1=2$，连 A_1B ∵ $C_1D // A_1B$ ∴ 异面直线 BE 与 CD_1 所成的角即 A_1B 与 BE 所成的角。在 ΔA_1BE 中由余弦定理易得 $\cos\angle A_1BE=\frac{3\sqrt{10}}{10}$。**故选 C**

19.(2009.II.15) 设 OA 是球 O 的半径，M 是 OA 的中点，过 M 且与 OA 成 45° 角的平面截球 O 的表面得到圆 C。若圆 C 的面积等于 $\frac{7\pi}{4}$，则球 O 的表面积等于____________.

分析：设球半径为 R，圆 C 的半径为 r，由 $4\pi r^2=\frac{7\pi}{4}$，得 $r^2=\frac{7}{4}$.

因为 $OC=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{R}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}R$。由 $R^2=(\frac{\sqrt{2}}{4}R)^2+r^2=\frac{1}{8}R^2+\frac{7}{4}$ 得 $R^2=2$. 故球 O 的表面积等于 8π.

20.(2009.II.18) 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC, D$、E 分别为 AA_1、B_1C 的中点，$DE\perp$ 平面 BCC_1



（I）证明：$AB=AC$

（II）设二面角 $A-BD-C$ 为 60°，求 B_1C 与平面 BCD 所成的角的大小。

分析：（I）**分析一**：连结 BE，∵ $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，∴ $\angle B_1BC=90^\circ$,

∵ E 为 B_1C 的中点，∴ $BE=EC$。又 $DE\perp$ 平面 BCC_1，

∴ $BD=DC$（射影相等的两条斜线段相等）而 $DA\perp$ 平面 ABC，

∴ $AB=AC$（相等的斜线段的射影相等）。

分析二：取 BC 的中点 F，证四边形 $AFED$ 为平行四边形，进而证 $AF // DE$，$AF\perp BC$，得 $AB=AC$ 也可。

分析三：利用空间向量的方法。具体解法略。

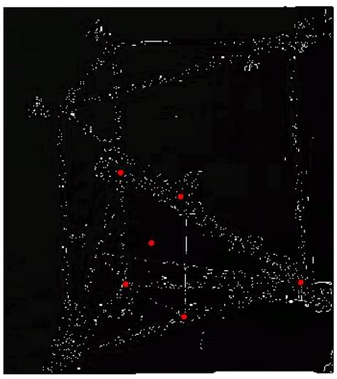
（II）**分析一**：求 B_1C 与平面 BCD 所成的线面角，只需求点 B_1 到面 BDC 的距离即可。

作 $AG\perp BD$ 于 G，连 GC，则 $GC\perp BD$，$\angle AGC$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角，

$\angle AGC=60^\circ$. 不妨设 $AC=2\sqrt{3}$，则

$AG=2, GC=4$. 在 $RT\Delta ABD$ 中，由

$AD\cdot AB=BD\cdot AG$，易得 $AD=\sqrt{6}$.



设点 B_1 到面 BDC 的距离为 h， B_1C 与平面 BCD 所成的角为 α 。利用

$\frac{1}{3}S_{\Delta B_1BC}\cdot DE=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot h$， 可求得 $h=2\sqrt{3}$， 又可求得 $B_1C=4\sqrt{3}$

$$\sin\alpha=\frac{h}{B_1C}=\frac{1}{2}\therefore\alpha=30°$$

即 B_1C 与平面 BCD 所成的角为30°.

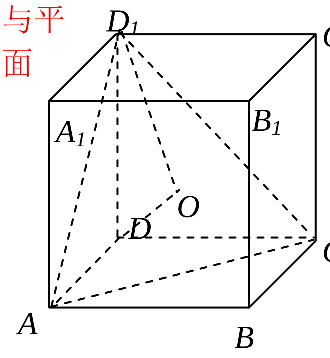
分析二：作出 B_1C 与平面 BCD 所成的角再行求解。如图可证得 $BC\perp$ 面$AFED$，所以面 $AFED\perp$ 面BDC。由分析一易知：四边形 $AFED$ 为正方形，连 AE、DF，并设交点为 O，则 $EO\perp$ 面BDC， $\therefore OC$ 为 EC 在面 BDC 内的射影。$\therefore\angle ECO$即为所求。以下略。

分析三：利用空间向量的方法求出面 BDC 的法向量 $\vec{n}$，则 B_1C 与平面 BCD 所成的角即为 $\overrightarrow{B_1C}$ 与法向量 $\vec{n}$ 的夹角的余角。具体解法详见高考试题参考答案。

总之在目前，立体几何中的两种主要的处理方法：传统方法与向量的方法仍处于各自半壁江山的状况。命题人在这里一定会兼顾双方的利益。

21.(2010.I.7) 正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，BB_1 与平面 ACD_1 所成角的余弦值为(　　　)

A $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　　B $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　C $\frac{2}{3}$　　　　D $\frac{\sqrt{6}}{3}$



分析：D 【命题意图】本小题主要考查正方体的性质、直线与平面所成的角、点到平面的距离的求法，利用等体积转化求出 D 到平面 ACD_1 的距离是解决本题的关键所在,这也是转化思想的具体体现.

【解析 1】因为 $BB_1//DD_1$,所以 BB_1 与平面 ACD_1 所成角和 DD_1 与平面 ACD_1 所成角相等,设 DO⊥平面 ACD_1， 由等体积法得

$V_{D-ACD_1}=V_{D_1-ACD}$,即 $\frac{1}{3}S_{\Delta ACD_1}\cdot DO=\frac{1}{3}S_{\Delta ACD}\cdot DD_1$.设 DD_1=a,

则 $S_{\Delta ACD_1}=\frac{1}{2}AC\bullet AD_1\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}a)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$, $S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}AD\bullet CD=\frac{1}{2}a^2$.

所以 $DO=\frac{S_{\Delta ACD}\bullet DD_1}{S_{\Delta ACD_1}}=\frac{a^3}{\sqrt{3}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,记 DD_1 与平面 ACD_1 所成角为 θ ,则 $\sin\theta=\frac{DO}{DD_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

【解析 2】设上下底面的中心分别为O_1, O；O_1O 与平面 ACD_1 所成角就是 BB_1 与平面 ACD_1 所成角，$\cos\angle O_1OD_1=\dfrac{|O_1O|}{|OD_1|}=1/\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

22.(2010.I.12) 已知在半径为 2 的球面上有 A、B、C、D 四点，若 AB=CD=2,则四面体 ABCD 的体积的最大值为 (　　)

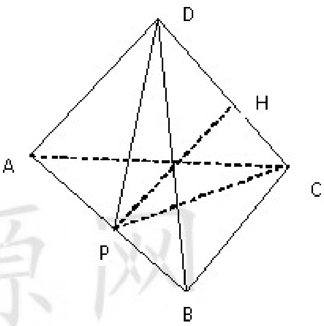
A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

分析：B【命题意图】本小题主要考查几何体的体积的计算、球的性质、异面直线的距离,通过球这个载体考查考生的空间想象能力及推理运算能力.

【解析 1】过 CD 作平面 PCD，使 AB⊥平面 PCD,交 AB 与 P,设点 P 到 CD 的距离为 h,则有 $V_{\text{四面体ABCD}}=\dfrac{1}{3}\times2\times\dfrac{1}{2}\times2\times h=\dfrac{2}{3}h$,当直径通过 AB 与 CD 的中点时,$h_{\max}=2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$,故 $V_{\max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

【解析 2】

【解析】AB=CD=2，设异面直线 AB、CD 的公垂线为 P H，垂足分别为 P、H，连接 PD、PC，设 A、B 到平面 PCD 的距离分别为h_1, h_2，$PH=h$

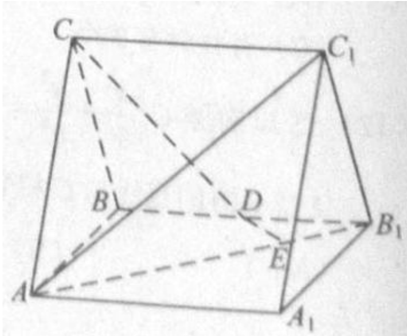


$$V_{\text{四面体}ABCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta APD}h_1+\frac{1}{3}S_{\Delta APD}h_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot h(h_1+h_2)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot h(h_1+h_2)\le\frac{1}{3}\cdot h(AP+PB)=\frac{2}{3}\cdot h$$

当且仅当 $AB\perp CD$ 取等号；下面研究 h 的最大值:

AB、CD 为异面直线，那么必存在过 AB 的小圆⊙O_1、过 CD 的小圆⊙O_2，使得平面⊙O_1平行于平面⊙O_2，则两平面间的距离就是异面直线 AB、CD 间的距离h，要使h最大，只需⊙O_1于⊙O_2的直径最小，即以 AB、CD 为直径时，h最大此时球的直径通过 AB 与 CD 的中点，$h_{\max}=|O_1O_2|=2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$，故$V_{\max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

23.(2010.I.19) 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC$，$AA_1=AB$，D 为 BB_1 的中点，E 为 AB_1 上的一点，$AE=3EB_1$.



（Ⅰ）证明：DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线；

（Ⅱ）设异面直线 AB_1 与 CD 的夹角为 45°，求二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的大小.

分析：【命题意图】本试题主要考查空间的线面关系与空间角的求解，考查考生的空间想象与推理计算的能力.

【参考答案】解法一：（I）连接 A_1B，记 A_1B 与 AB_1 的交点为 F.

因为面 AA_1BB_1 为正方形，故 $A_1B\perp AB_1$，且 AF=FB_1，又 AE=$3EB_1$，所以 FE=EB_1，又 D 为 BB_1 的中点，故 DE∥BF，DE⊥AB_1. ………………3 分

作 CG⊥AB，G 为垂足，由 AC=BC 知，G 为 AB 中点.

又由底面 ABC⊥面 AA_1B_1B. 连接 DG，则 DG∥AB_1，故 DE⊥DG，由三垂线定理，得 DE⊥CD.

所以 DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线.

（II）因为 DG∥AB_1，故∠CDG 为异面直线 AB_1 与 CD 的夹角，∠CDG=45°

设 AB=2，则 $AB_1=2\sqrt{2}$，DG=$\sqrt{2}$，CG=$\sqrt{2}$，AC=$\sqrt{3}$.

作 $B_1H\perp A_1C_1$，H 为垂足，因为底面 $A_1B_1C_1\perp$ 面 AA_1CC_1，故 $B_1H\perp$ 面 AA_1C_1C. 又作 $HK\perp AC_1$，K 为垂足，连接 B_1K，由三垂线定理，得 $B_1K\perp AC_1$，因此∠B_1KH 为二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的平面角.

$$B_1H=\frac{A_1B_1\times\sqrt{A_1C_1^2-(\frac{1}{2}A_1B_1)^2}}{A_1C_1}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$HC_1=\sqrt{B_1C_1^2-B_1H^2}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$AC_1=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7},\quad HK=\frac{AA_1\times HC_1}{AC_1}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{7}},$$

$$\tan\angle B_1KH=\frac{B_1H}{HK}=\sqrt{14},$$

所以二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的大小为 $\arctan\sqrt{14}$. ……

解法二：

（Ⅰ）以 B 为坐标原点，射线 BA 为 x 轴正半轴，建立如图所示的空间直角坐 $B-xyz$.

设 $AB=2$，则 $A(2,0,0)$，$B_1(0,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)$，

又设 $C(1,0,c)$，则 $\overrightarrow{DE}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{B_1A}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{DC}=(1,-1,c)$. ……

于是 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{B_1A}=0$，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，

故 $DE\perp B_1A$, $DE\perp DC$,

所以 DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线. ……

（Ⅱ）因为 $\langle\overrightarrow{B_1A},\overrightarrow{DC}\rangle$ 等于异面直线 AB_1 与 CD 的夹角,

故 $\overrightarrow{B_1A}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{B_1A}|\cdot|\overrightarrow{DC}|\cos45^\circ$,

即 $2\sqrt{2}\times\sqrt{c^2+2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4$,

解得 $c=\sqrt{2}$, 故 $\overrightarrow{AC}=(-1,0,\sqrt{2})$.

又 $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=(0,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}=(-1,2,\sqrt{2})$. ……

设平面 AA_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

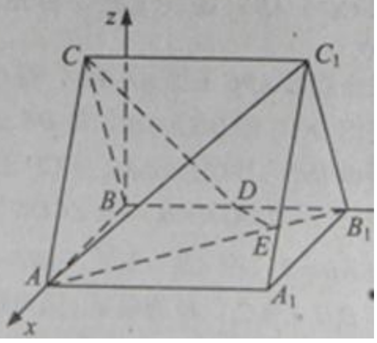
则 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0$, $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$,

即 $-x+2y+\sqrt{2}z=0$ 且 $2y=0$.

令 $x=\sqrt{2}$, 则 $z=1$, $y=0$, 故 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},0,1)$.

设平面 AB_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(p,q,r)$,

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0$, $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1A}=0$,



即 $-p+2q+\sqrt{2}r=0$, $2p-2q=0$.

令 $p=\sqrt{2}$, 则 $q=\sqrt{2}$, $r=-1$, 故 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},\sqrt{2},-1)$.

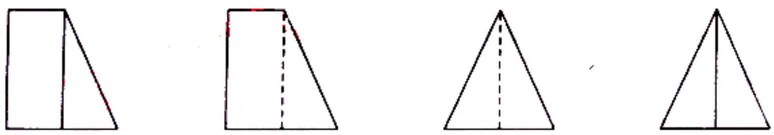
所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

由于 $\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle$ 等于二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的平面角,

所以二面角 $A_1-AC_1-B_1$ 的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

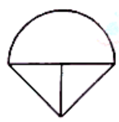
【点评】三垂线定理是立体几何的最重要定理之一，是高考的的热点，它是处理线线垂直问题的有效方法，同时它也是确定二面角的平面角的主要手段. 通过引入空间向量，用向量代数形式来处理立体几何问题，淡化了传统几何中的“形”到“形”的推理方法，从而降低了思维难度，使解题变得程序化，这是用向量解立体几何问题的独到之处.

24.(2011.I.6) 在一个几何体的三视图中，正视图和俯视图如右图所示，则相应的侧视图可以为 ( )



（A） （B） （C） （D）

（正视图）



（俯视图）

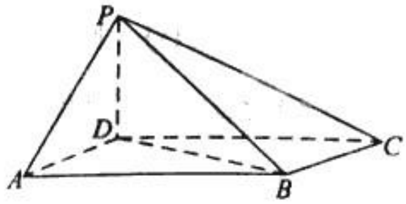
分析：条件对应的几何体是由底面棱长为 r 的正四棱锥沿底面对角线截出的部分与底面为半径为 r 的圆锥沿对称轴截出的部分构成的。故选 D

25.(2011.I.15) 已知矩形 $ABCD$ 的顶点都在半径为 4 的球 O 的球面上，且 $AB=6, BC=2\sqrt{3}$，则棱锥 $O-ABCD$ 的体积为____________.

分析：设 ABCD 所在的截面圆的圆心为 M,则 AM= $\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2}=2\sqrt{3}$，

OM= $\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$，$V_{O-ABCD}=\frac{1}{3}\times 6\times 2\sqrt{3}\times 2=8\sqrt{3}$.

26.(2011.I.18) 如图，四棱锥 *P-ABCD* 中，底面 *ABCD* 为平行四边形，∠DAB=60°,AB=2*AD*,*PD*⊥底面 *ABCD*.



(Ⅰ) 证明：*PA*⊥*BD*;

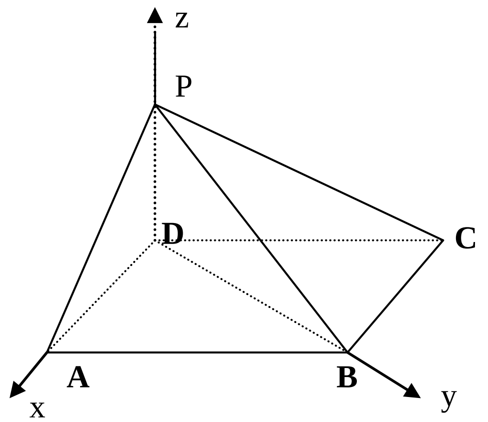
(Ⅱ) 若 *PD*=*AD*，求二面角 *A-PB-C* 的余弦值。

分析：解析 1：（Ⅰ）因为 $\angle DAB=60°, AB=2AD$，由余弦定理得 $BD=\sqrt{3}AD$

从而 $BD^2+AD^2=AB^2$，故 *BD* ⊥*AD*;又 *PD* ⊥底面 *ABCD*，可得 *BD* ⊥*PD*

所以 *BD* ⊥平面 *PAD*. 故 *PA*⊥*BD*

（Ⅱ）如图，以 D 为坐标原点，AD 的长为单位长，射线 DA 为 x 轴的正半轴建立空间直角坐标系 D-xyz，则



$A(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0), C(-1,\sqrt{3},0), P(0,0,1)$。

$\overline{AB}=(-1,\sqrt{3},0), \overline{PB}=(0,\sqrt{3},-1), \overline{BC}=(-1,0,0)$

设平面 PAB 的法向量为 **n**=（x,y,z），则 $\begin{cases} n\cdot\overline{AB}=0 \\ n\cdot\overline{PB}=0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} -x+\sqrt{3}y=0 \\ \sqrt{3}y-z=0 \end{cases}$ 因此可取 **n**=$(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$

设平面 PBC 的法向量为 **m**，则 $\begin{cases} m\cdot\overline{PB}=0 \\ m\cdot\overline{BC}=0 \end{cases}$ 可取 **m**=（0，-1，$-\sqrt{3}$）

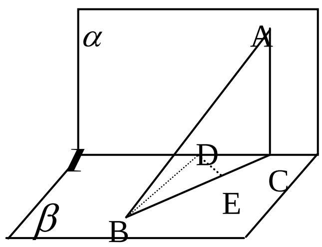
$\cos\langle m,n\rangle=\frac{-4}{2\sqrt{7}}=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 故二面角 *A-PB-C* 的余弦值为 $-\frac{2\sqrt{7}}{7}$

27.已知直二面角 $\alpha-l-\beta$，点 $A\in\alpha$，$AC\perp l$，C 为垂足，$B\in\beta$，$BD\perp l$，D 为垂足．若 $AB=2, AC=BD=1$，则 D 到平面 ABC 的距离等于 （ ）

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. 1

分析：C

【命题意图】本题主要考查空间点到平面距离的求法.



【解析】如图,过 D 作 $DE\perp BC$,垂足为 E ,因为 $\alpha-l-\beta$ 是直二面角,

$AC\perp l$,∴ $AC\perp$ 平面 β ， ∴ $AC\perp DE$ ， $BC\perp DE$ ， $AC\cap BC=C$ ，

∴ $DE\perp$ 平面 ABC ,故 DE 的长为点 D 到平面 ABC 的距离.在 $Rt\Delta BCD$ 中,由等面积法得

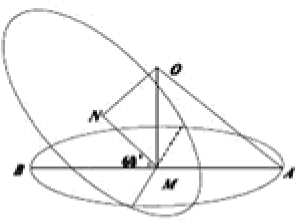
$DE=\dfrac{BD\times CD}{BC}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

28.(2011.II.11) 已知平面 α 截一球面得圆 M ， 过圆心 M 且与 α 成 60^0 二面角的平面 β 截该球面得圆 N .若该球面的半径为 4，圆 M 的面积为 4π ，则圆 N 的面积为 ( )

A. 7π　　B. 9π　　C. 11π　　D. 13π

分析：D

【命题意图】本题主要考查二面角的概念与球的性质.



【解析】如图所示,由圆 M 的面积为 4π 知球心 O 到圆 M 的距离 $OM=2\sqrt{3}$,在 $Rt\Delta OMN$ 中, $\angle OMN=30^\circ$, ∴ $ON=\dfrac{1}{2}OM=\sqrt{3}$,故圆 N 的半径 $r=\sqrt{R^2-ON^2}=\sqrt{13}$,∴圆 N 的面积为 $S=\pi r^2=13\pi$.

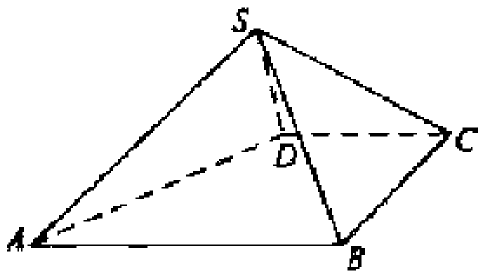
29.(2011.II.16) 已知点 E 、 F 分别在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1 、 CC_1 上，且 $B_1E=2EB, CF=2FC_1$ ， 则面 AEF 与面 ABC 所成的二面角的正切值等于______.

分析： $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

【命题意图】本题主要考查正方体中二面角的求法.

【解析】延长 FE 交 CB 的延长线于 G ,连结 AG ,则 AG 为面 AEF 与面 ABC 的交线,由 $B_1E=2EB, CF=2FC_1$ 得 $CF=2BE$,∴ B 为 GC 中点.设正方体的棱长为 1,则 $AG=AC=\sqrt{2}$,又 $GC=2$,∴ $AC^2+AG^2=GC^2$ ∴ $\angle CAG=90^\circ$ ∵ $FC\perp$ 平面 ABC ,∴ $FA\perp AG$ ∴ $\angle CAF$ 是面 AEF 与面 ABC 所成的二面角的平面角,在 $Rt\triangle ACF$ 中, $\tan\angle CAF=\dfrac{CF}{AC}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$,故面 AEF 与面 ABC 所成的二面角的正切值等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

30.(2011.II.19) 如图，四棱锥$S-ABCD$中，$AB//CD$，$BC\perp CD$，侧面SAB为等边三角形，$AB=BC=2, CD=SD=1$.

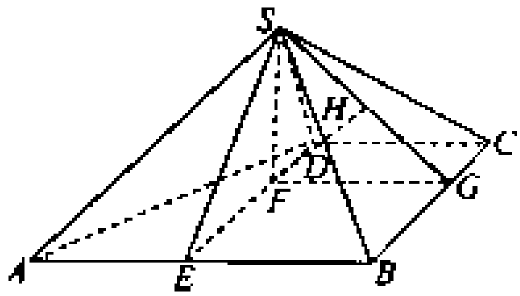


(Ⅰ) 证明：$SD\perp$平面SAB；

(Ⅱ) 求AB与平面SBC所成角的大小.

分析：【命题意图】以四棱锥为载体考查线面垂直证明和线面角的计算，注重与平面几何的综合.

解法一：(Ⅰ)取AB中点E，连结DE，则四边形$BCDE$为矩形，$DE=CB=2$，连结SE，则$SE\perp AB$，$SE=\sqrt{3}$.



又$SD=1$，故$ED^2=SE^2+SD^2$，所以$\angle DSE$为直角. ………………3 分

由$AB\perp DE$，$AB\perp SE$，$DE\cap SE=E$，得$AB\perp$平面SDE，所以$AB\perp SD$.

SD与两条相交直线AB、SE都垂直.

所以$SD\perp$平面SAB. ………………6 分

另解:由已知易求得$SD=1, AD=\sqrt{5}, SA=2$，于是$SA^2+SD^2=AD^2$.可知$SD\perp SA$，同理可得$SD\perp SB$，又$SA\cap SB=S$.所以$SD\perp$平面SAB. ………………6 分

(Ⅱ)由$AB\perp$平面SDE知，平面$ABCD\perp$平面SDE.

作$SF\perp DE$，垂足为F，则$SF\perp$平面 ABCD，$SF=\dfrac{SD\times SE}{DE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

作$FG\perp BC$，垂足为G，则$FG=DC=1$. 连结SG.则$SG\perp BC$.

又$BC\perp FG$，$SG\cap FG=G$，故$BC\perp$平面SFG，平面$SBC\perp$平面SFG…….9 分

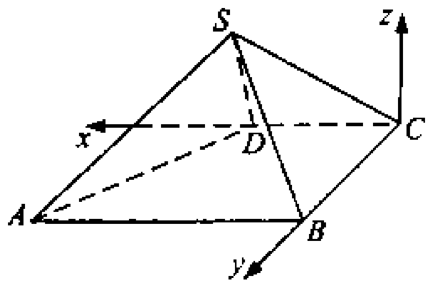
作$FH\perp SG$，H为垂足，则$FH\perp$平面SBC.

$FH=\dfrac{SF\times FG}{SG}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，即$F$到平面$SBC$的距离为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

由于$ED//BC$，所以$ED//$平面SBC，E到平面SBC的距离d也为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

设AB与平面SBC所成的角为α，则$\sin\alpha=\dfrac{d}{EB}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，$\alpha=\arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{7}$…….12 分

解法二：以 C 为原点,射线 CD 为 x 轴的正半轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$.



设 $D(1,0,0)$,则 $A(2,2,0)$、 $B(0,2,0)$.

又设 $S(x,y,z)$,则 $x>0,y>0,z>0$.

(Ⅰ) $\overrightarrow{AS}=(x-2,y-2,z),\overrightarrow{BS}=(x,y-2,z),\overrightarrow{DS}=(x-1,y,z)$,

由 $|\overrightarrow{AS}|=|\overrightarrow{BS}|$ 得 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}$，故 $x=1$.

由 $|\overrightarrow{DS}|=1$ 得 $y^2+z^2=1$，又由 $|\overrightarrow{BS}|=2$ 得 $x^2+(y-2)^2+z^2=4$,

即 $y^2+z^2-4y+1=0$,故 $y=\frac{1}{2},z=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ....3 分

于是 $S(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{AS}=(-1,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{BS}=(1,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{DS}=(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,

$\overrightarrow{DS}\cdot\overrightarrow{AS}=0,\overrightarrow{DS}\cdot\overrightarrow{BS}=0$.

故 $DS\perp AS,DS\perp BS$,又 $AS\cap BS=S$,所以 $SD\perp$ 平面 SAB. ....6 分

(Ⅱ)设平面 SBC 的法向量 $\vec{a}=(m,n,p)$，则 $\vec{a}\perp\overrightarrow{BS},\vec{a}\perp\overrightarrow{CB},\vec{a}\cdot\overrightarrow{BS}=0,\vec{a}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

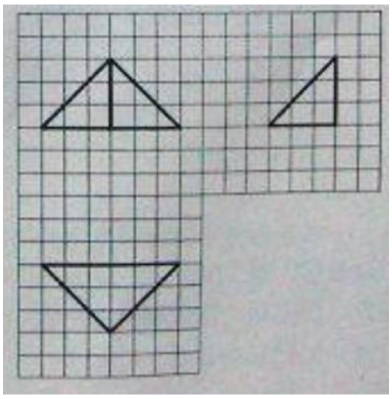
又 $\overrightarrow{BS}=(1,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$,故 $\begin{cases}m-\frac{3}{2}n+\frac{\sqrt{3}}{2}p=0,\\2n=0\end{cases}$ ....9 分

取 $p=2$ 得 $\vec{a}=(-\sqrt{3},0,2)$,又 $\overrightarrow{AB}=(-2,0,0)$, $\cos<\overrightarrow{AB},\vec{a}>=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

故 AB 与平面 SBC 所成的角为 $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$. ....12 分

【点评】立体几何一直以来都是让广大考生又喜又忧的题目.为之而喜是因为只要能建立直角坐标系，基本上可以处理立体几何绝大多数的问题；为之而忧就是对于不规则的图形来讲建系的难度较大，问题不能得到很好的解决.今年的立几问题建系就存在这样的问题，很多考生由于建系问题导致立几的完成情况不是很好.

31.(2012.I.7) 如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗线画出的是某几何体的三视图，则此几何体的体积为 (　　)



(A) 6　　(B) 9

(C) 12　　(D) 18

分析：选 B

该几何体是三棱锥，底面是俯视图，高为3

此几何体的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 6\times 3\times 3=9$

32.(2012.I.11) 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，ΔABC 是边长为1的正三角形，SC 为球 O 的直径，且 $SC=2$；则此棱锥的体积为 (　　)

(A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

分析：选 A

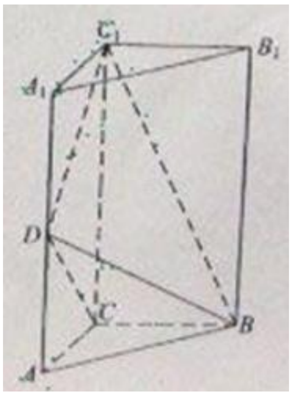
ΔABC 的外接圆的半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，点 O 到面 ABC 的距离 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

SC 为球 O 的直径 $\Rightarrow$ 点 S 到面 ABC 的距离为 $2d=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

此棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\times 2d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

另：$V<\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\times 2R=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 排除 B,C,D

33.(2012.I.19) 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=\frac{1}{2}AA_1$，D 是棱 AA_1 的中点，$DC_1\perp BD$



（1）证明：$DC_1\perp BC$

（2）求二面角 A_1-BD-C_1 的大小。

分析：（1）在 $Rt\Delta DAC$ 中，$AD=AC$ 得：$\angle ADC=45^\circ$

同理：$\angle A_1DC_1=45^\circ\Rightarrow\angle CDC_1=90^\circ$

得：$DC_1\perp DC, DC_1\perp BD\Rightarrow DC_1\perp$ 面 $BCD\Rightarrow DC_1\perp BC$

（2）$DC_1\perp BC, CC_1\perp BC\Rightarrow BC\perp$ 面 $ACC_1A_1\Rightarrow BC\perp AC$

取 A_1B_1 的中点 O，过点 O 作 $OH \perp BD$ 于点 H，连接 C_1O, C_1H

$A_1C_1 = B_1C_1 \Rightarrow C_1O \perp A_1B_1$，面 $A_1B_1C_1 \perp$ 面 $A_1BD \Rightarrow C_1O \perp$ 面 A_1BD

$OH \perp BD \Rightarrow C_1H \perp BD$ 得：点 H 与点 D 重合

且 $\angle C_1DO$ 是二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的平面角

设 $AC = a$，则 $C_1O = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$，$C_1D = \sqrt{2}a = 2C_1O \Rightarrow \angle C_1DO = 30^{\circ}$

既二面角 $A_1 - BD - C_1$ 的大小为 30°

34.(2012.II.4) 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB = 2, CC_1 = 2\sqrt{2}, E$ 为 CC_1 的中点，则直线 AC_1 与平面 BED 的距离为 (　　)

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

分析：D

【命题意图】本试题主要考查了正四棱柱的性质的运用，以及点到面的距离的求解。体现了转换与化归的思想的运用，以及线面平行的距离，转化为点到面的距离即可。

【解析】因为底面的边长为 2，高为 $2\sqrt{2}$，且连接 AC, BD，得到交点为 O，连接 EO，$EO // AC_1$，则点 C_1 到平面 BDE 的距离等于 C 到平面 BDE 的距离，过点 C 作 $CH \perp OE$，则 CH 即为所求，在三角形 OCE 中，利用等面积法，可得 $CH = 1$，故选答案 D。

35.(2012.II.16) 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面边长和侧棱长都相等，$\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60°$，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为________.

分析：$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

【命题意图】本试题考查了斜棱柱中异面直线的角的求解。用空间向量进行求解即可。

【解析】设该三棱柱的边长为 1，依题意有 $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}$，则

$$|\overrightarrow{AB_1}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1}^2 = 2 + 2\cos 60° = 3$$

$$|\overrightarrow{BC_1}|^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA_1} - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$$ 而

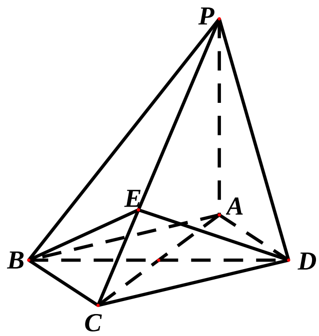
$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB})$$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=1$

$\therefore \cos<\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{BC_1}>=\frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}||\overrightarrow{BC_1}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

36.(2012.II.18) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AC=2\sqrt{2}$，$PA=2$，E 是 PC 上的一点，$PE=2EC$。



（1）证明：$PC\perp$ 平面 BED；

（2）设二面角 $A-PB-C$ 为 90°，求 PD 与平面 PBC 所成角的大小。

分析：【命题意图】本试题主要是考查了四棱锥中关于线面垂直的证明以及线面角的求解的运用。从题中的线面垂直以及边长和特殊的菱形入手得到相应的垂直关系和长度，并加以证明和求解。

解：设 $AC\cap BD=O$，以 O 为原点，OC 为 x 轴，OD 为 y 轴建立空间直角坐标系，则

$A(-\sqrt{2},0,0),C(\sqrt{2},0,0),P(-\sqrt{2},0,2)$，设 $B(0,-a,0),D(0,a,0),E(x,y,z)$。

（Ⅰ）证明：由 $PE=2EC$ 得 $E(\frac{\sqrt{2}}{3},0,\frac{2}{3})$，所以 $\overrightarrow{PC}=(2\sqrt{2},0,-2)$，$\overrightarrow{BE}=(\frac{\sqrt{2}}{3},a,\frac{2}{3})$，

$\overrightarrow{BD}=(0,2a,0)$，所以 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BE}=(2\sqrt{2},0,-2)\cdot(\frac{\sqrt{2}}{3},a,\frac{2}{3})=0$，

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BD}=(2\sqrt{2},0,-2)\cdot(0,2a,0)=0$。所以 $\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{BD}$，所以 $PC\perp$ 平面 BED；

（Ⅱ） 设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，又 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2),\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},-a,0)$，由

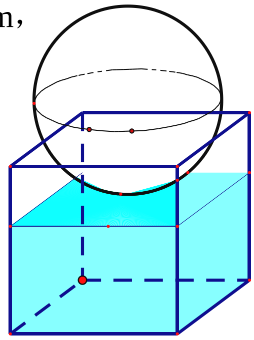
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 得 $\vec{n}=(1,\frac{\sqrt{2}}{a},0)$，设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，又

$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{2},a,0),\overrightarrow{CP}=(-2\sqrt{2},0,2)$，由 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，得 $\vec{m}=(1,-\frac{\sqrt{2}}{a},\sqrt{2})$，由于二面角 $A-PB-C$ 为 90°，所以 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，解得 $a=\sqrt{2}$。

所以 $\overrightarrow{PD}=(\sqrt{2},\sqrt{2},-2)$，平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(1,-1,\sqrt{2})$，所以 PD 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{|\overrightarrow{PD}\cdot\vec{m}|}{|\overrightarrow{PD}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{1}{2}$，所以 PD 与平面 PBC 所成角为 $\frac{\pi}{6}$.

【点评】试题从命题的角度来看，整体上题目与我们平时练习的试题和相似，底面也是特殊的菱形，一个侧面垂直于底面的四棱锥问题，那么创新的地方就是点 E 的位置的选择是一般的三等分点，这样的解决对于学生来说就是比较有点难度的，因此最好使用空间直角坐标系解决该问题为好。

37.(2013.I.6) 如图，有一个水平放置的透明无盖的正方体容器，容器高 8cm，将一个球放在容器口，再向容器内注水，当球面恰好接触水面时测得水深为 6cm，如果不计容器的厚度，则球的体积为　　　　(　　　)

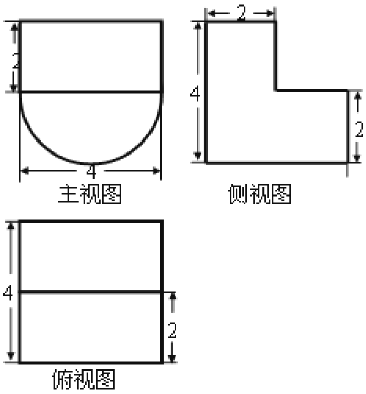


A. $\dfrac{500\pi}{3}cm^3$　　　　B. $\dfrac{866\pi}{3}cm^3$

C. $\dfrac{1372\pi}{3}cm^3$　　　　D. $\dfrac{2048\pi}{3}cm^3$

分析：A.

38.(2013.I.8) 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为 (　　　)



A．$16+8\pi$　　　　B．$8+8\pi$

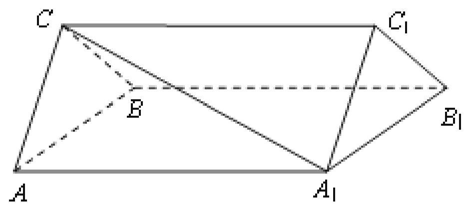
C．$16+16\pi$　　　　D．$8+16\pi$

分析：A.

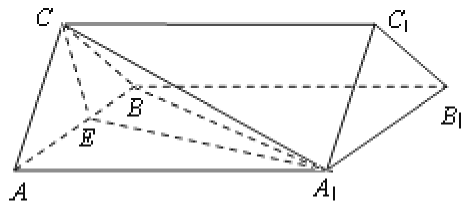
39.(2013.I.18) 如图，三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，CA=CB，AB=A A_1，∠BA A_1=60°.

（Ⅰ）证明 AB⊥A_1C;

（Ⅱ）若平面 ABC⊥平面 AA_1B_1B，AB=CB=2，求直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值。



分析：（Ⅰ）取 AB 中点 E，连结 CE，A_1B，A_1E，

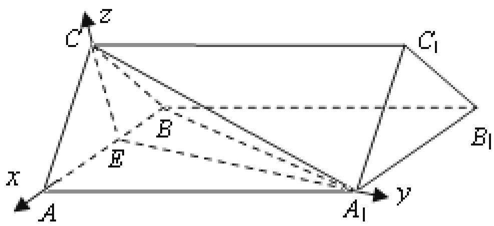


∵AB= AA_1，$\angle BAA_1=60^0$，∴ ΔBAA_1 是正三角形，

∴ A_1E ⊥AB，　∵CA=CB，　∴CE⊥AB，

∵ $CE\cap A_1E$ =E，∴AB⊥面 CEA_1，

∴AB⊥ A_1C；　　　　……6分



（Ⅱ）由（Ⅰ）知 EC⊥AB，EA_1 ⊥AB，

又∵面 ABC⊥面 ABB_1A_1，面 ABC∩面 ABB_1A_1 =AB，

∴EC⊥面 ABB_1A_1，∴EC⊥ EA_1，

∴EA，EC，EA_1两两相互垂直，以 E 为坐标原点，$\overrightarrow{EA}$的方向为 x 轴正方向，$|\overrightarrow{EA}|$为单位长度，建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$，

有题设知 A(1,0,0), $A_1(0,\sqrt{3},0)$,C(0,0,$\sqrt{3}$),B(－1,0,0),则 $\overrightarrow{BC}$ =（1,0，$\sqrt{3}$），$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}$ =(－1,0,$\sqrt{3}$), $\overrightarrow{A_1C}$ =(0,－$\sqrt{3}$,$\sqrt{3}$), ……9 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 CBB_1C_1 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{BC}=0\\ \boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0\\ x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{n}$ =（$\sqrt{3}$，1，-1），

∴ $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1C}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{A_1C}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{A_1C}|}\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

∴直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ……12 分

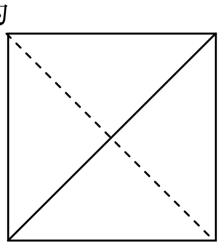
40.(2013.II.4) 已知 m,n 为异面直线，$m\perp$平面 α，$n\perp$平面 β。直线 l 满足 $l\perp m, l\perp n, l\not\subset\alpha, l\not\subset\beta$，则 (　　)

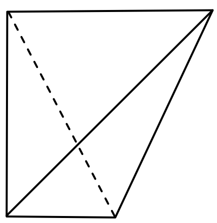
A. $\alpha//\beta$，且 $l//\alpha$　　B. $\alpha\perp\beta$，且 $l\perp\beta$

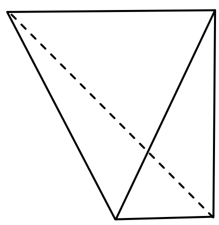
C. α 与 β 相交，且交线垂直于 l　　D. α 与 β 相交，且交线平行于 l

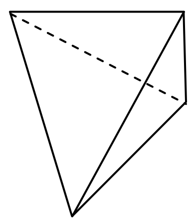
分析：D.

41.(2013.II.7) 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(0,0,0)$，画该四面体三视图中的正视图时，以 zOx 平面为投影面，则得到正视图可以为 (　　)


A.

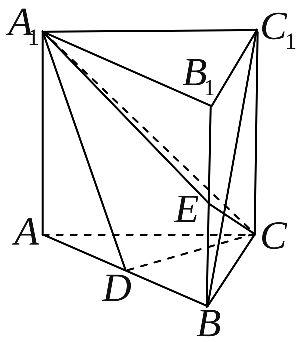

B.


C.


D.

分析：A.

42.(2013.II.18) 如图，直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,E 分别是 AB,BB_1 的中点，$AA_1=AC=CB=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$.



（Ⅰ）证明：$BC_1//$ 平面 A_1CD；

（Ⅱ）求二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值.

分析：

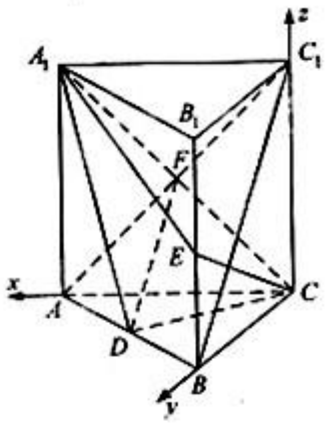
（18）解：

（Ⅰ）连结 AC_1 交 A_1C 于点 F，则 F 为 AC_1 中点.

又 D 是 AB 中点，连结 DF，则 $BC_1 // DF$.

因为 $DF\subset$ 平面 A_1CD，$BC_1\not\subset$ 平面 A_1CD，所以 $BC_1 //$ 平面 A_1CD.

（Ⅱ）由 $AC=CB=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$ 得，$AC\perp BC$.



以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CA}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$. 设 $CA=2$，则

$D(1,1,0)$，$E(0,2,1)$，$A_1(2,0,2)$，

$\overrightarrow{CD}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{CA_1}=(2,0,2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 A_1CD 的法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}x_1+y_1=0,\\ 2x_1+2z_1=0.\end{cases}$$

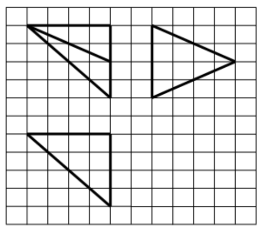
可取 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$.

同理，设 $\boldsymbol{m}$ 是平面 A_1CE 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(2,1,-2)$.

从而 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\sin\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

即二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

43.(2014.I.12) 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的个条棱中，最长的棱的长度为(　　　)

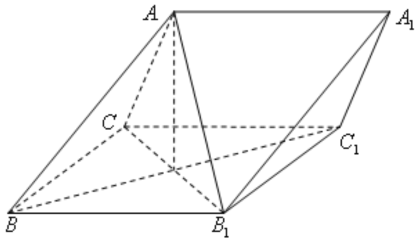


$A.6\sqrt{2}$　　　　$B.4\sqrt{2}$

$C.6$　　　　$D.4$

分析：C.

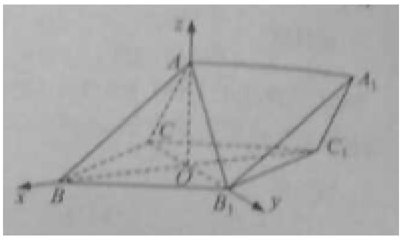
44.(2014.I.19) 如图三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，$AB\perp B_1C$.



（Ⅰ）证明：$AC=AB_1$；

（Ⅱ）若 $AC\perp AB_1$，$\angle CBB_1=60^{\circ}$，AB=Bc，求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值.

分析：（I）连接 BC_1，交 B_1C 于点 O，连接 AO，因为侧面 BB_1C_1C 为菱形，所以 $B_1C\perp BC_1$，且 O 为 B_1C 及 BC_1 的中点.



又 $AB\perp B_1C$，所以 $B_1C\perp$ 平面 ABO.由于 $AO\subset$ 平面 ABO，故 $B_1C\perp AO$.

又 $B_1O=CO$，故 $AC=AB_1$.

（II）因为 $AC\perp AB_1$，且 O 为 B_1C 的中点，所以 $AO=CO$.

又因为 $AB=BC$，所以 $\Delta BOA\cong\Delta BOC$，故 $OA\perp OB$，从而 OA,OB,OB_1 两两相互垂直，

以 O 为坐标原点，$\overline{OB}$ 的方向为 x 轴正方向，$|\overline{OB}|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $O=xyz$.

因为 $\angle CBB_1=60°$，所以 ΔCBB_1 为等边三角形.又 $AB=BC$，则

$$A(0,0,\frac{\sqrt3}{3}),B(1,0,0),B_1(0,\frac{\sqrt3}{3},0),C(0,-\frac{\sqrt3}{3},0).$$

$$\overrightarrow{AB_1}=(0,\frac{\sqrt3}{3},-\frac{\sqrt3}{3}),\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=(1,0,-\frac{\sqrt3}{3}),\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}=(-1,-\frac{\sqrt3}{3},0),$$

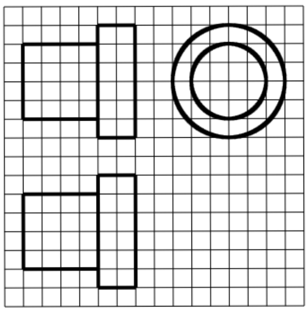
设 $n=(x,y,z)$ 是平面 AA_1B_1 的法向量，则

$$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}\frac{\sqrt3}{3}y-\frac{\sqrt3}{3}z=0,\\ x-\frac{\sqrt3}{3}z=0.\end{cases}\text{所以可取}n=(1,\sqrt3,\sqrt3).$$

设 m 是平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量，则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\ m\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=0,\end{cases}$ 同理可取 $m=(1,-\sqrt3,\sqrt3)$.

则 $\cos\langle n,m\rangle=\dfrac{n\cdot m}{|n||m|}=\dfrac{1}{7}$.所以二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{7}$.　　　……12 分

45.(2014.II.6) 如图，网格纸上正方形小格的边长为 1（表示 1cm），图中粗线画出的是某零件的三视图，该零件由一个底面半径为 3cm，高为 6cm 的圆柱体毛坯切削得到，则切削掉部分的体积与原来毛坯体积的比值为　　　　　　　　（　　）



A. $\frac{17}{27}$　　B. $\frac{5}{9}$　　C. $\frac{10}{27}$　　D. $\frac{1}{3}$

分析：C.

46.(2014.II.11) 直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，∠BCA=90°，M，N 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点，BC=CA=CC_1，则 BM 与 AN 所成的角的余弦值为　（　　）

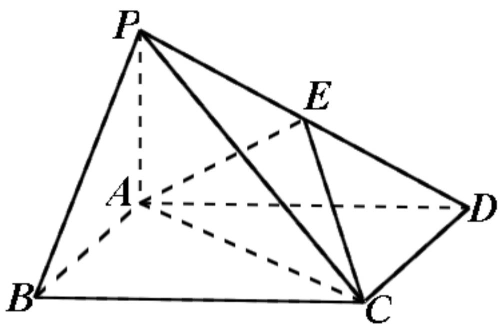
A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{30}}{10}$　　D. $\frac{\sqrt2}{2}$

分析：C.

47.(2014.II.18) 如图，四棱锥 P-ABCD 中，底面 ABCD 为矩形，PA⊥平面 ABCD，E 为 PD 的中点.

（Ⅰ）证明：PB∥平面 AEC；

（Ⅱ）设二面角 D-AE-C 为 60°，AP=1，AD=$\sqrt{3}$，求三棱锥 E-ACD 的体积.



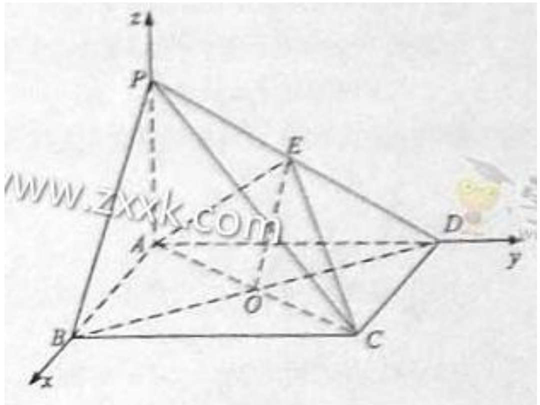
分析：（I）连接 BD 交 AC 于点 O,连结 EO。

因为 ABCD 为矩形，所以 O 为 BD 的中点。

又 E 为 PD 的中点，所以 EO∥PB。EO⊂平面 AEC,PB⊄平面 AEC,所以 PB∥平面 AEC.

（Ⅱ）因为 PA⊥平面 ABCD，ABCD 为矩形，所以 AB,AD,AP 两两垂直。

如图，以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$ 的方向为 x 轴的正方向，$\left|\overrightarrow{AP}\right|$ 为单位长，建立空间直角坐标系



$A-xyz$，则 $D(0,\sqrt{3},0),\ E(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}),\ \overrightarrow{AE}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$.

设 $b(m,0,0)(m\succ 0)$，则 $c(m,\sqrt{3},0),\ \overrightarrow{AC}=(m,\sqrt{3},0)$。

设 $n_1=(x,y,z)$ 为平面 ACE 的法向量，

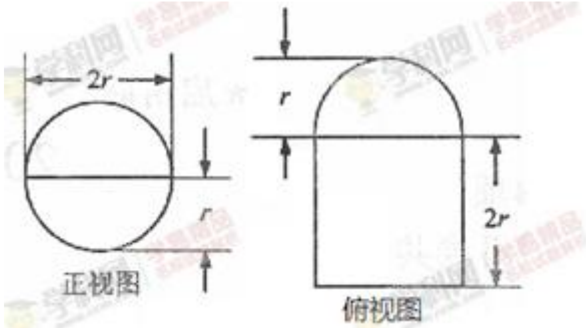
则 $\begin{cases} n_1\cdot\overrightarrow{AC}=0, \\ n_1\cdot\overrightarrow{AE}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} mx+\sqrt{3}y=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0, \end{cases}$，

可取 $n_1=(\frac{\sqrt{3}}{m},-1,\sqrt{3})$。又 $n_2=(1,0,0)$ 为平面 DAE 的法向量，由题设 $\left|\cos\langle n_1,n_2\rangle\right|=\frac{1}{2}$，即

$\sqrt{\frac{3}{3+4m^2}}=\frac{1}{2}$，解得 $m=\frac{3}{2}$。因为 E 为 PD 的中点，所以三棱锥 $E-ACD$ 的高为 $\frac{1}{2}$.

三菱锥 $E-ACD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

48.(2015.I.11) 圆柱被一个平面截去一部分后与半球(半径为 r)组成一个几何体，该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示.若该几何体的表面积为 $16+20\pi$，则 r=　　(　　　)

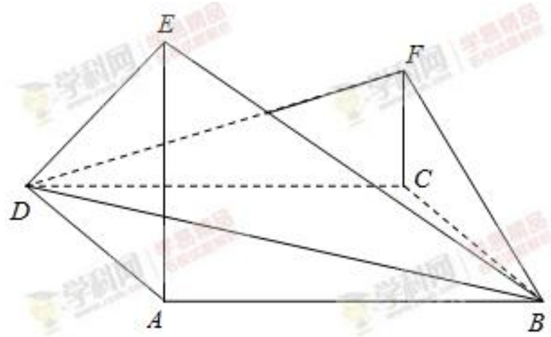


A. 1　　　　B. 2　　　　C. 4　　　　D. 8

【答案】B

【解析】由正视图和俯视图知，该几何体是半球与半个圆柱的组合体，圆柱的半径与球的半径都为 r，圆柱的高为 2r，其表面积为 $\frac{1}{2}\times 4\pi r^2+\pi r\times 2r+\pi r^2+2r\times 2r=5\pi r^2+4r^2=16+20\pi$，解得 r=2，故选 B.
【考点定位】简单几何体的三视图；球的表面积公式、圆柱的测面积公式
【名师点睛】本题考查简单组合体的三视图的识别，是常规提，对简单组合体三三视图问题，先看俯视图确定底面的形状，根据正视图和侧视图，确定组合体的形状，再根据“长对正，宽相等，高平齐”的法则组合体中的各个量.

49.(2015.I.18) 如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC$=120°，E，F 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点，$BE\perp$平面 $ABCD$，$DF\perp$平面 $ABCD$，BE=2DF，$AE\perp EC$.

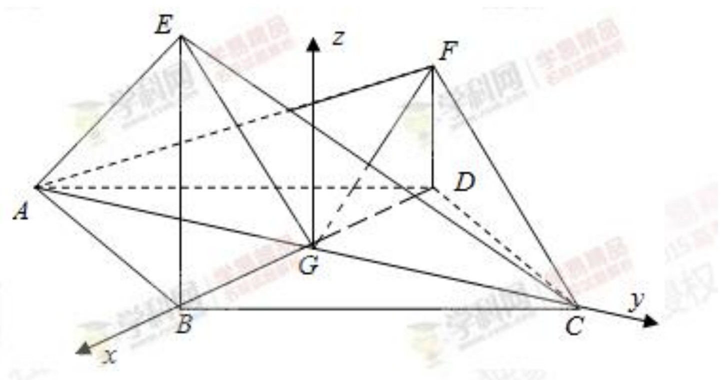


（Ⅰ）证明：平面 $AEC\perp$平面 AFC；
（Ⅱ）求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值.

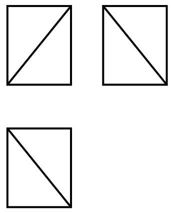
【答案】（Ⅰ）见解析（Ⅱ）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】
试题分析：（Ⅰ）连接 BD，设 $BD\cap AC=G$，连接 EG，FG，EF，在菱形 $ABCD$ 中，不妨设 GB=1 易证 $EG\perp AC$，通过计算可证 $EG\perp FG$，根据线面垂直判定定理可知 $EG\perp$平面 AFC，由面面垂直判定定理知平面 $AFC\perp$平面 AEC；（Ⅱ）以 G 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}$ 的方向为 x 轴，y 轴正方向，$|\overrightarrow{GB}|$为单位长度，建立空间直角坐标系 G-xyz，利用向量法可求出异面直线 AE 与 CF 所成角的余弦值.
试题解析：（Ⅰ）连接 BD，设 $BD\cap AC=G$，连接 EG，FG，EF，在菱形 $ABCD$ 中，不妨设 GB=1，由$\angle ABC$=120°，可得 $AG=GC=\sqrt{3}$.由 $BE\perp$平面 $ABCD$，$AB=BC$ 可知，$AE=EC$，
又∵$AE\perp EC$，∴$EG=\sqrt{3}$，$EG\perp AC$，在 Rt△ EBG 中，可得 $BE=\sqrt{2}$，故 $DF=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
在 Rt△ FDG 中，可得 $FG=\frac{\sqrt{6}}{2}$.在直角梯形 $BDFE$ 中，由 BD=2，$BE=\sqrt{2}$，$DF=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 可得 $EF=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，
∴ $EG^2+FG^2=EF^2$，∴$EG\perp FG$，∵$AC\cap FG=G$，∴$EG\perp$平面 AFC，
∵$EG\subset$面 AEC，∴平面 $AFC\perp$平面 AEC.　　　……6 分
（Ⅱ）如图，以 G 为坐标原点，分别以$\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}$的方向为 x 轴，y 轴正方向，$|\overrightarrow{GB}|$为单位长度，建立空间直角坐标系 G-xyz，由（Ⅰ）可得 A（0，$-\sqrt{3}$，0），E(1,0，$\sqrt{2}$)，F（−1,0，$\frac{\sqrt{2}}{2}$），C（0，$\sqrt{3}$，0），
∴ $\overrightarrow{AE}$=（1，$\sqrt{3}$，$\sqrt{2}$），$\overrightarrow{CF}$=（-1，-$\sqrt{3}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$）….10 分
故 $\cos<\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CF}>=\frac{\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{CF}|}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
所以直线 AE 与 CF 所成的角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　　……12 分
【考点定位】空间垂直判定与性质；异面直线所成角的计算；空间想象能力，推理论证能力
【名师点睛】对空间面面垂直问题的证明有两种思路，思路 1：几何法，先由线线垂直证明线面垂直，再由线面垂直证明面面垂直；思路 2：利用向量法，通过计算两个平面的法向量，

证明其法向量垂直，从而证明面面垂直；对异面直线所成角问题，也有两种思路，思路1：几何法，步骤为一找二作三证四解，一找就是先在图形中找有没有异面直线所成角，若没有，则通常做平行线或中位线作出异面直线所成角，再证明该角是异面直线所成角，利用解三角形解出该角.



50.(2015.II.6) 一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如右图，则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 (　　)

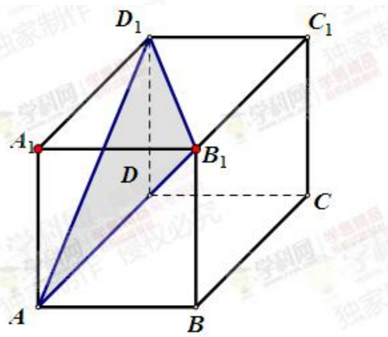


A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{7}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{5}$

【答案】D

【解析】由三视图得，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，截去四面体 $A-A_1B_1D_1$，如图所示，，设正方体棱长为 a，则 $V_{A-A_1B_1D_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^3=\frac{1}{6}a^3$，故剩余几何体体积为 $a^3-\frac{1}{6}a^3=\frac{5}{6}a^3$，所以截去部分体积与剩余部分体积的比值为 $\frac{1}{5}$，故选 D.

【考点定位】三视图.



【名师点睛】本题以正方体为背景考查三视图、几何体体积的运算，要求有一定的空间想象能力，关键是能从三视图确定截面，进而求体积比，属于中档题.

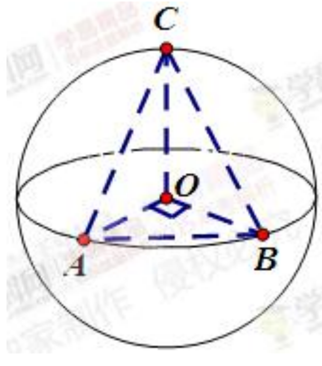
51.(2015.II.9) 已知 A,B 是球 O 的球面上两点，∠AOB=90,C 为该球面上的动点，若三棱锥 O-ABC 体积的最大值为 36，则球 O 的表面积为 (　　)

A．36π　　B.64π　　C.144π　　D.256π

【答案】C

学科网【解析】如图所示，当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时，三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大，设球 O 的半径为 R，此时 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}R^2\times R=\frac{1}{6}R^3=36$，故 $R=6$，则球 O 的表面积为 $S=4\pi R^2=144\pi$，故选 C.

【考点定位】外接球表面积和椎体的体积.

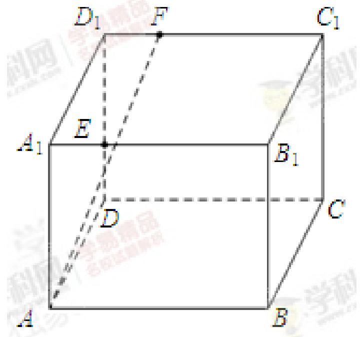


【名师点睛】本题以球为背景考查空间几何体的体积和表面积计算，要明确球的截面性质，正确理解四面体体积最大时的情形，属于中档题.

52.(2015.II.19) 如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, AB=16，BC=10，$AA_1=8$，点 E，F 分别在 A_1B_1，C_1D_1 上，$A_1E=D_1F=4$．过点 E，F 的平面 α 与此长方体的面相交，交线围成一个正方形．

（Ⅰ）在图中画出这个正方形（不必说出画法和理由）；

（Ⅱ）求直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值．



【答案】（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ）$\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$．

【解析】（Ⅰ）交线围成的正方形 $EHGF$ 如图：

（Ⅱ）作 $EM\perp AB$，垂足为 M，则 $AM=A_1E=4$，$EM=AA_1=8$，因为 $EHGF$ 为正方形，所以 $EH=EF=BC=10$．于是 $MH=\sqrt{EH^2-EM^2}=6$，所以 $AH=10$．以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $A(10,0,0)$，$H(10,10,0)$，$E(10,4,8)$，$F(0,4,8)$，$\overrightarrow{FE}=(10,0,0)$，$\overrightarrow{HE}=(0,-6,8)$．设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 $EHGF$ 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{FE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{HE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}10x=0,\\ -6y+8z=0,\end{cases}$ 所以可取 $\vec{n}=(0,4,3)$．又 $\overrightarrow{AF}=(-10,4,8)$，故 $\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{AF}>\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AF}\right|}=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$．所以直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$．

【考点定位】1、直线和平面平行的性质；2、直线和平面所成的角．

【名师点睛】根据线面平行和面面平行的性质画平面 α 与长方体的面的交线；由交线的位置可确定公共点的位置，坐标法是求解空间角问题时常用的方法，但因其计算量大的特点很容易出错，故坐标系的选择是很重要的，便于用坐标表示相关点，先求出面 α 的法向量，利用 $\sin\theta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{AF}>\right|$ 求直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值..