5 平面向量

湖南师大附中，数学教研组，张湘君

1.(2007.I.3) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-5,6)$，$\boldsymbol{b}=(6,5)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ ( )

A．垂直　　B．不垂直也不平行　　C．平行且同向　　D．平行且反向

2.(2007.II.5) 在$\triangle ABC$中，已知 D 是 AB 边上一点，若 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，则 $\lambda=$

( )

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$-\dfrac{1}{3}$　　D．$-\dfrac{2}{3}$

3.(2008.I.3) 在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$．若点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AD}=$( )

A．$\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　B．$\dfrac{5}{3}\boldsymbol{c}-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$　　C．$\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　D．$\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{c}$

4.(2008.II.13) 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$，若向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}=(-4,-7)$ 共线，则 $\lambda=$_____.

5.(2009.I.6) 设 a、b、c 是单位向量，且 $a\cdot b=0$，则 $(a-c)\bullet(b-c)$ 的最小值为( )

A. -2　　B. $\sqrt{2}-2$　　C. -1　　D. $1-\sqrt{2}$

6.(2009.II.6) 已知向量 $a=(2,1),a\cdot b=10,|a+b|=5\sqrt{2}$，则 $|b|=$ ( )

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. 5　　D. 25

7.(2011.I.10) 已知 **a** 与 ***b*** 均为单位向量，其夹角为 θ，有下列四个命题

$P_1:|a+b|>1\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$　　$P_2:|a+b|>1\Leftrightarrow\theta\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]$

$P_3:|a-b|>1\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$　　$P_4:|a-b|>1\Leftrightarrow\theta\in\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$

其中的真命题是 ( )

A. P_1,P_4　　B. P_1,P_3　　C. P_2,P_3　　D. P_2,P_4

8.(2011.II.12) 设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\bullet\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$，$<\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}>=60^\circ$，则 $|\vec{c}|$ 的最大值等于 ( )

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

9.(2012.I.13) 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角为 45°，且 $\left|\vec{a}\right|=1,\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{10}$；则 $\left|\vec{b}\right|=$_____.

10.(2012.II.6) ΔABC中，AB边上的高为CD，若$\overrightarrow{CB}=\vec{a},\overrightarrow{CA}=\vec{b},\vec{a}\cdot\vec{b}=0,|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，则$\overrightarrow{AD}=$ ( )

A．$\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$　　B．$\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$　　C．$\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$　　D．$\frac{4}{5}\vec{a}-\frac{4}{5}\vec{b}$

11.(2013.I.13) 已知两个单位向量 ***a***，***b*** 的夹角为 60°，***c***＝t***a***＋(1－t)***b***，若 ***b***·***c***=0，则 t=_____.

14.(2013.II.13) 已知正方形$ABCD$的边长为2，E为CD的中点，则$\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BD}=$________.

15.(2014.I.15) 已知 A，B，C 是圆 O 上的三点，若$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为______.

16.(2014.II.3) 设向量 a,b 满足$|a+b|=\sqrt{10}$，$|a-b|=\sqrt{6}$，则 $a\cdot b=$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 5

17.(2015.I.7) 设D为ΔABC所在平面内一点$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则 ( )

A. $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　B. $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\frac{1}{3}AC}$　　D. $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\frac{1}{3}AC}$

18.(2015.II.13) 设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$不平行，向量$\lambda\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}+2\vec{b}$平行，则实数$\lambda=$_________.

5 平面向量

湖南师大附中，数学教研组，张湘君

1.(2007.I.3) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-5,6)$， $\boldsymbol{b}=(6,5)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ （　　）

A．垂直　　B．不垂直也不平行　　C．平行且同向　　D．平行且反向

分析：由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，选 A.

2.(2007.II.5) 在△ABC 中，已知 D 是 AB 边上一点，若 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，则 $\lambda=$ （　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

分析：A.

3.(2008.I.3) 在△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$．若点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AD}=$(　　)

A. $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　B. $\frac{5}{3}\boldsymbol{c}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$　　C. $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$

分析：A. 由 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)$，$3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{c}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}$；

4.(2008.II.13) 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$，若向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}=(-4,-7)$ 共线，则 $\lambda=$______.

分析：2

【解析】$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\lambda+2,2\lambda+3)$ 则向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}=(-4,-7)$ 共线 $\Leftrightarrow\frac{\lambda+2}{2\lambda+3}=\frac{-4}{-7}\Rightarrow\lambda=2$

5.(2009.I.6) 设 a、b、c 是单位向量，且 $a\cdot b=0$，则 $(a-c)\bullet(b-c)$ 的最小值为(　　)

A. -2　　B. $\sqrt{2}-2$　　C. -1　　D. $1-\sqrt{2}$

分析：D. $\because\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是单位向量 $\therefore\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\bullet\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\bullet\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b})\bullet\vec{c}+\vec{c}^{\,2}$

$=1-|\vec{a}+\vec{b}|\bullet|\vec{c}|=1-\sqrt{2}\cos<\vec{a}+\vec{b},\vec{c}>\geq1-\sqrt{2}$

6.(2009.II.6) 已知向量 $a=(2,1),a\cdot b=10,|a+b|=5\sqrt{2}$，则 $|b|=$ （　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. 5　　D. 25

分析：$\because50=|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}+|\vec{b}|^2=5+20+|\vec{b}|^2\ \therefore|\vec{b}|=5$。故选 C

7.(2011.I.10) 已知 **a** 与 **b** 均为单位向量，其夹角为 θ，有下列四个命题

$P_1:|a+b|>1\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right)$　　　　$P_2:|a+b|>1\Leftrightarrow\theta\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right]$

$P_3:|a-b|>1\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ $\qquad$ $P_4:|a-b|>1\Leftrightarrow\theta\in\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$

其中的真命题是 ( )

A. P_1,P_4 B. P_1,P_3 C. P_2,P_3 D. P_2,P_4

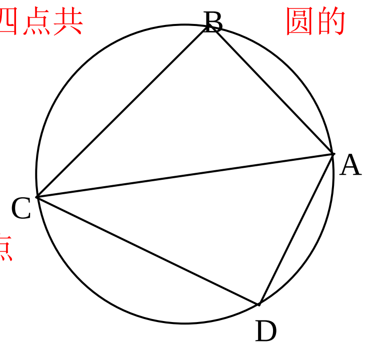
分析：$|a+b|=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}=\sqrt{2+2\cos\theta}>1$得，$\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$，$\Rightarrow\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$。

由$|a-b|=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}=\sqrt{2-2\cos\theta}>1$得$\cos\theta<\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta\in\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$。 选 A

8.(2011.II.12) 设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\bullet\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$，$<\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}>=60^\circ$，则$|\vec{c}|$的最大值等于 ( )

A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

分析：A



【命题意图】本题主要考查平面向量的数量积运算、向量加减法、四点共圆的条件及数形结合的思想.

【解析】如图，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，则

$\angle BAD=120^\circ,\angle BCD=60^\circ$，$\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$，∴ A,B,C,D四点共圆，当AC为圆的直径时，$|\vec{c}|$最大，最大值为 2.

9.(2012.I.13) 已知向量$\vec{a},\vec{b}$夹角为45°，且$|\vec{a}|=1,|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$；则$|\vec{b}|=$______.

分析：$3\sqrt{2}$

$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}\Leftrightarrow(2\vec{a}-\vec{b})^2=10\Leftrightarrow4+|\vec{b}|^2-4|\vec{b}|\cos45^\circ=10\Leftrightarrow|\vec{b}|=3\sqrt{2}$

10.(2012.II.6) ΔABC中，AB边上的高为CD，若$\overrightarrow{CB}=\vec{a},\overrightarrow{CA}=\vec{b},\vec{a}\cdot\vec{b}=0,|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，则$\overrightarrow{AD}=$ ( )

A. $\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$ B. $\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$ C. $\dfrac{3}{5}\vec{a}-\dfrac{3}{5}\vec{b}$ D. $\dfrac{4}{5}\vec{a}-\dfrac{4}{5}\vec{b}$

分析：D

【命题意图】本试题主要考查了向量的加减法几何意义的运用，结合运用特殊直角三角形求解点 D 的位置的运用。

【解析】由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 可得 $\angle ACB=90°$，故 $AB=\sqrt{5}$，用等面积法求得 $CD=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以

$AD=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，故 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}=\dfrac{4}{5}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\dfrac{4}{5}\vec{a}-\dfrac{4}{5}\vec{b}$，故选答案 D

11.(2013.I.13) 已知两个单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，$\boldsymbol{c}$＝t$\boldsymbol{a}$＋(1－t)$\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{c}$=0，则 t=_____.

分析：$t=2$.

14.(2013.II.13) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BD}=$_______.

分析：2.

15.(2014.I.15) 已知 A，B，C 是圆 O 上的三点，若 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为______.

分析：90°.

16.(2014.II.3) 设向量 a,b 满足$|a+b|=\sqrt{10}$，$|a-b|=\sqrt{6}$，则 $a\cdot b=$ ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

分析：A.

17.(2015.I.7) 设 D 为 ΔABC 所在平面内一点 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则 ( )

A. $\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\dfrac{1}{3}AC}$ D. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\dfrac{1}{3}AC}$

【答案】A

【解析】由题知 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})==-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$，故选 A.

【考点定位】平面向量的线性运算

【名师点睛】本题以三角形为载体考查了平面向量的加法、减法及实数与向量的积的法则与运算性质，是基础题，解答本题的关键是结合图形会利用向量加法将向量 $\overrightarrow{AD}$ 表示为 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$，再用已知条件和向量减法将 $\overrightarrow{CD}$ 用 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ 表示出来.

18.(2015.II.13) 设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不平行，向量 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+2\vec{b}$ 平行，则实数 $\lambda=$_________.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】因为向量 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+2\vec{b}$ 平行，所以 $\lambda\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}+2\vec{b})$，则 $\begin{cases}\lambda=k,\\1=2k,\end{cases}$ 所以 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

【考点定位】向量共线.

【名师点睛】本题考查向量共线，明确平面向量共线定理，利用待定系数法得参数的关系是解题关键，属于基础题.