8 直线与圆

湖南师大附中，数学教研组，张湘君

1.(2007.II.20) 在直角坐标系 xOy 中，以 O 为圆心的圆与直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 相切.

（1）求圆 O 的方程;

（2）圆 O 与 x 轴相交于 A，B 两点，圆内的动点 P 使 $|PA|,|PO|,|PB|$ 成等比数列，求 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

2.(2008.I.10) 若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 通过点 $M(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则 (　　)

A. $a^2+b^2\leqslant 1$　　B. $a^2+b^2\geqslant 1$　　C. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\leqslant 1$　　D. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geqslant 1$

3.(2008.II.11) 等腰三角形两腰所在直线的方程分别为 $x+y-2=0$ 与 $x-7y-4=0$，原点在等腰三角形的底边上，则底边所在直线的斜率为 (　　)

A. 3　　B. 2　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

4.(2009.II.16) 已知 AC、BD 为圆 $O:x^2+y^2=4$ 的两条相互垂直的弦，垂足为 $M\left(1,\sqrt{2}\right)$,则四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为______________.

5.(2010.I.11) 已知圆 O 的半径为 1，PA、PB 为该圆的两条切线，A、B 为俩切点，那么 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 的最小值为 (　　)

A. $-4+\sqrt{2}$　　B. $-3+\sqrt{2}$　　C. $-4+2\sqrt{2}$　　D. $-3+2\sqrt{2}$

6.(2013.I.20) 已知圆$M:(x+1)^2+y^2=1$,圆$N:(x-1)^2+y^2=9$,动圆P与M外切并且与圆N内切，圆心P的轨迹为曲线 C.

（Ⅰ）求 C 的方程；

（Ⅱ）l是与圆P,圆M都相切的一条直线，l与曲线 C 交于 A，B 两点，当圆 P 的半径最长时，求|AB|.

7.(2013.II.12) 已知点$A(-1,0),B(1,0),C(0,1)$，直线$y=ax+b(a>0)$将△ ABC分割为面积相等的两部分，则b的取值范围是 (　　)

A. $(0,1)$　　B. $(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$　　C. $(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{3}]$　　D. $[\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

8.(2014.II.16) 设点 M（x_0,1），若在圆 O: $x^2+y^2=1$上存在点 N，使得∠OMN=45°，则x_0的取值范围是________.

9.(2015.II.7) 过三点$A(1,3)$，$B(4,2)$，$C(1,-7)$的圆交y轴于M，N两点，则$|MN|=$(　　)

A．$2\sqrt{6}$　　B．8　　C．$4\sqrt{6}$　　D．10

8 直线与圆

湖南师大附中，数学教研组，张湘君

1.(2007.II.20) 在直角坐标系 xOy 中，以 O 为圆心的圆与直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 相切.

（1）求圆 O 的方程；

（2）圆 O 与 x 轴相交于 A，B 两点，圆内的动点 P 使 $|PA|,|PO|,|PB|$ 成等比数列，求 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

分析：（1）依题设，圆 O 的半径 r 等于原点 O 到直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 的距离，

即 $r=\dfrac{4}{\sqrt{1+3}}=2$. 得圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$.

（2）不妨设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，$x_1<x_2$. 由 $x^2=4$ 即得 $A(-2,0)$，$B(2,0)$.

设 $P(x,y)$，由 $|PA|,|PO|,|PB|$ 成等比数列，得 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}\bullet\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x^2+y^2$，

即 $x^2-y^2=2$. $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=(-2-x,-y)\bullet(2-x,-y)=x^2-4+y^2=2(y^2-1)$.

由于点 P 在圆 O 内，故 $\begin{cases}x^2+y^2<4,\\x^2-y^2=2.\end{cases}$ 由此得 $y^2<1$. 所以 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 $[-2,0)$.

2.(2008.I.10) 若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 通过点 $M(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则 ( )

A. $a^2+b^2\leqslant 1$　　B. $a^2+b^2\geqslant 1$　　C. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\leqslant 1$　　D. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geqslant 1$

分析：D. 由题意知直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 有交点，则 $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}\leqslant 1, \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geqslant 1$.

另解：设向量 $\boldsymbol{m}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\boldsymbol{n}=(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b})$，由题意知 $\dfrac{\cos\alpha}{a}+\dfrac{\sin\alpha}{b}=1$

由 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\leqslant|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|$ 可得 $1=\dfrac{\cos\alpha}{a}+\dfrac{\sin\alpha}{b}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}$

3.(2008.II.11) 等腰三角形两腰所在直线的方程分别为 $x+y-2=0$ 与 $x-7y-4=0$，原点在等腰三角形的底边上，则底边所在直线的斜率为 ( )

A. 3　　B. 2　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

分析：**A**

【解析】$l_1: x+y-2=0, k_1=-1$， $l_2: x-7y-4=0, k_2=\frac{1}{7}$， 设底边为$l_3: y=kx$

由题意，l_3到l_1所成的角等于l_2到l_3所成的角于是有$\frac{k_1-k}{1+k_1k}=\frac{k-k_2}{1+k_2k}\Rightarrow\frac{k+1}{k-1}=\frac{7k-1}{7+3}$

再将 A、B、C、D 代入验证得正确答案是 A

【高考考点】两直线成角的概念及公式

【备考提示】本题是由教材的一个例题改编而成。（人教版 P49 例 7）

4.(2009.II.16) 已知AC、BD为圆$O: x^2+y^2=4$的两条相互垂直的弦，垂足为$M\left(1,\sqrt{2}\right)$,则四边形$ABCD$的面积的最大值为______________.

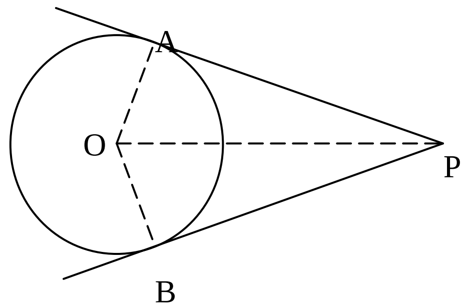
分析：设圆心O到AC、BD的距离分别为d_1、d_2,则$d_1{}^2+d_2{}^2=OM^2=3$.

四边形$ABCD$的面积$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=2\sqrt{(4-d_1{}^2)(4-d_2{}^2)}\le 8-(d_1{}^2+d_2{}^2)=5$

5.(2010.I.11) 已知圆 O 的半径为 1，PA、PB 为该圆的两条切线，A、B 为俩切点，那么$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$的最小值为 (　　)

A. $-4+\sqrt{2}$　　B. $-3+\sqrt{2}$　　C. $-4+2\sqrt{2}$　　D. $-3+2\sqrt{2}$

分析：D【命题意图】本小题主要考查向量的数量积运算与圆的切线长定理，着重考查最值的求法——判别式法,同时也考查了考生综合运用数学知识解题的能力及运算能力.



【解析 1】如图所示：设 PA=PB=x $(x>0)$,∠APO=α,则

∠APB=2α， PO=$\sqrt{1+x^2}$， $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，

$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cos 2\alpha=x^2(1-2\sin^2\alpha)=\frac{x^2(x^2-1)}{x^2+1}=\frac{x^4-x^2}{x^2+1}$，

令$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=y$， 则$y=\frac{x^4-x^2}{x^2+1}$， 即$x^4-(1+y)x^2-y=0$， 由$x^2$是实数，所以

$\Delta=[-(1+y)]^2-4\times1\times(-y)\ge 0$， $y^2+6y+1\ge 0$，解得$y\le -3-2\sqrt{2}$或$y\ge -3+2\sqrt{2}$.故

$(\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB})_{\min}=-3+2\sqrt{2}$.此时$x=\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

【解析 2】法一： 设$\angle APB=\theta, 0<\theta<\pi$， $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=(PA)(PB)\cos\theta=\left(1/\tan\frac{\theta}{2}\right)^2\cos\theta$

$$=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

法二：换元： $x=\sin^2\frac{\theta}{2},0<x\le 1$， $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=\frac{(1-x)(1-2x)}{x}=2x+\frac{1}{x}-3\ge 2\sqrt{2}-3$

或建系：园的方程为 $x^2+y^2=1$， 设 $A(x_1,y_1),B(x_1,-y_1),P(x_0,0)$，

$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=(x_1-x_0,y_1)\cdot(x_1-x_0,-y_1)=x_1^2-2x_1x_0+x_0^2-y_1^2$

$AO\perp PA\Rightarrow(x_1,y_1)\cdot(x_1-x_0,y_1)=0\Rightarrow x_1^2-x_1x_0+y_1^2=0\Rightarrow x_1x_0=1$

$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=x_1^2-2x_1x_0+x_0^2-y_1^2=x_1^2-2+x_0^2-\left(1-x_1^2\right)=2x_1^2+x_0^2-3\ge 2\sqrt{2}-3$

6.(2013.I.20) 已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$,圆 $N:(x-1)^2+y^2=9$,动圆 P 与 M 外切并且与圆 N 内切，圆心 P 的轨迹为曲线 C.

（Ⅰ）求 C 的方程;

（Ⅱ）l 是与圆 P ,圆 M 都相切的一条直线，l 与曲线 C 交于 A，B 两点，当圆 P 的半径最长时，求|AB|.

分析：由已知得圆 M 的圆心为 M （-1，0）,半径 r_1 =1，圆 N 的圆心为 N (1,0),半径 r_2 =3.

设动圆 P 的圆心为 P （x， y ），半径为R.

（Ⅰ）∵圆 P 与圆 M 外切且与圆 N 内切，∴|PM|+|PN|= $(R+r_1)+(r_2-R)=r_1+r_2$ =4，

由椭圆的定义可知，曲线C是以M，N为左右焦点，场半轴长为2，短半轴长为 $\sqrt{3}$ 的椭圆(左顶点除外)，其方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\ne -2)$.

（Ⅱ）对于曲线C上任意一点 P （x， y ），由于|PM|-|PN|= $2R-2\le 2$，∴R≤2,

当且仅当圆P的圆心为（2，0）时，R=2.

∴当圆P的半径最长时，其方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，[来源:学&科&网Z&X&X&K]

当 l 的倾斜角为 90^0 时，则 l 与 y 轴重合，可得|AB|= $2\sqrt{3}$.

当 l 的倾斜角不为 90^0 时，由 r_1≠R知 l 不平行 x 轴，设 l 与 x 轴的交点为Q，则 $\frac{|QP|}{|QM|}=\frac{R}{r_1}$，可求得Q（-4，0），∴设 l： $y=k(x+4)$，由 l 于圆M相切得 $\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

当 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，将 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq -2)$ 并整理得 $7x^2+8x-8=0$，解得

$x_{1,2}=\frac{-4\pm 6\sqrt{2}}{7}$，$\therefore$|AB|=$\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\frac{18}{7}$.

当 $k=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，由图形的对称性可知|AB|=$\frac{18}{7}$，

综上，|AB|=$\frac{18}{7}$ 或|AB|=$2\sqrt{3}$.

7.(2013.II.12) 已知点 $A(-1,0),B(1,0),C(0,1)$，直线 $y=ax+b(a>0)$ 将△ ABC 分割为面积相等的两部分，则 b 的取值范围是 ( )

A. $(0,1)$　　B. $(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$　　C. $(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{3}]$　　D. $[\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

分析：B.

8.(2014.II.16) 设点 M（x_0,1），若在圆 O: $x^2+y^2=1$ 上存在点 N，使得∠OMN=45°，则 x_0 的取值范围是________.

分析：$[-1,1]$.

9.(2015.II.7) 过三点 $A(1,3)$，$B(4,2)$，$C(1,-7)$ 的圆交 y 轴于 M，N 两点，则 $|MN|=$ ( )

A. $2\sqrt{6}$　　B. 8　　C. $4\sqrt{6}$　　D. 10

【答案】C

【解析】由已知得 $k_{AB}=\frac{3-2}{1-4}=-\frac{1}{3}$，$k_{CB}=\frac{2+7}{4-1}=-3$，所以 $k_{AB}k_{CB}=-1$，所以 $AB\perp CB$，即 ΔABC 为直角三角形，其外接圆圆心为 $(1,-2)$，半径为 5，所以外接圆方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$，令 $x=0$，得 $y=\pm 2\sqrt{6}-2$，所以 $|MN|=4\sqrt{6}$，故选 C.

【考点定位】圆的方程.

【名师点睛】本题考查三角形的外接圆方程，要注意边之间斜率的关系，得出 ΔABC 是直角三角形，可以简洁快速地求出外接圆方程，进而求弦 MN 的长，属于中档题.