

11 排列组合、二项式定理

湖南师大附中, 数学教研组, 张湘君

1.(2007.I.10) $(x^2 - \frac{1}{x})^n$ 的展开式中, 常数项为 15, 则 $n =$ ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

2.(2007.I.13) 从班委会 5 名成员中选出 3 名, 分别担任班级学习委员、文娱委员与体育委员, 其中甲、乙二人不能担任文娱委员, 则不同的选法共有_____种. (用数字作答)

3.(2007.II.10) 从 5 位同学中选派 4 位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天, 要求星期五有 2 人参加, 星期六、星期日各有 1 人参加, 则不同的选派方法共有()

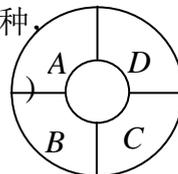
- A. 40 种 B. 60 种 C. 100 种 D. 120 种

4.(2007.II.13) $(1+2x^2)(x-\frac{1}{x})^8$ 的展开式中常数项为_____. (用数字作答)

5.(2008.I.12) 如图, 一环形花坛分成 A, B, C, D 四块, 现有 4 种不同的花供选种,

要求在每块里种 1 种花, 且相邻的 2 块种不同的花, 则不同的种法总数为()

- A. 96 B. 84 C. 60 D. 48



6.(2008.II.7) $(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x 的系数是 ()

- A. -4 B. -3 C. 3 D. 4

7.(2009.I.5) 甲组有 5 名男同学, 3 名女同学; 乙组有 6 名男同学、2 名女同学。若从甲、乙两组中各选出 2 名同学, 则选出的 4 人中恰有 1 名女同学的不同选法共有 ()

- A. 150 种 B. 180 种 C. 300 种 D. 345 种

8.(2009.I.13) $(x-y)^{10}$ 的展开式中, x^7y^3 的系数与 x^3y^7 的系数之和等于_____.

9.(2009.II.10) 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门。则甲、乙所选的课程中至少有 1 门不相同的选法共有 ()

- A. 6 种 B. 12 种 C. 30 种 D. 36 种

10.(2009.II.13) $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为_____.

11.(2010.I.5) $(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5$ 的展开式中 x 的系数是 ()

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

12.(2010.I.6) 某校开设 A 类选修课 3 门, B 类选择课 4 门, 一位同学从中共选 3 门, 若要求两类课程中各至少选一门, 则不同的选法共有 ()

- A. 30 种 B. 35 种 C. 42 种 D. 48 种

- 13.(2011.I.8) $\left(x + \frac{a}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2, 则该展开式中常数项为()
- A. -40 B. -20 C. 20 D. 40
- 14.(2011.II.7) 某同学有同样的画册 2 本, 同样的集邮册 3 本, 从中取出 4 本赠送给 4 位朋友每位朋友 1 本, 则不同的赠送方法共有 ()
- A. 4 种 B. 10 种 C. 18 种 D. 20 种
- 15.(2011.II.13) $(1 - \sqrt{x})^{20}$ 的二项展开式中, x 的系数与 x^9 的系数之差为_____.
- 16.(2012.I.2) 将 2 名教师, 4 名学生分成 2 个小组, 分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动, 每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成, 不同的安排方案共有 ()
- (A) 12 种 (B) 10 种 (C) 9 种 (D) 8 种
- 17.(2012.II.11) 将字母 a, a, b, b, c, c 排成三行两列, 要求每行的字母互不相同, 每列的字母也互不相同, 则不同的排列方法共有 ()
- A. 12 种 B. 18 种 C. 24 种 D. 36 种
- 18.(2012.II.15) 若 $(x + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中第 3 项与第 7 项的二项式系数相等, 则该展开式中 $\frac{1}{x^2}$ 的系数为_____.
- 19.(2013.I.9) 设 m 为正整数, $(x + y)^{2m}$ 展开式的二项式系数的最大值为 a , $(x + y)^{2m+1}$ 展开式的二项式系数的最大值为 b , 若 $13a = 7b$, 则 $m =$ ()
- A.5 B.6 C.7 D.8
- 20.(2013.II.5) 已知 $(1 + ax)(1 + x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 5, 则 $a =$ ()
- A. -4 B. -3 C. -2 D. -1
- 21.(2014.I.5) 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动, 则周六、周日都有同学参加公益活动的概率 ()
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{7}{8}$
- 22.(2014.I.13) $(x - y)(x + y)^8$ 的展开式中 $x^2 y^2$ 的系数为_____.(用数字填写答案)
- 23.(2014.II.13) $(x + a)^{10}$ 的展开式中, x^7 的系数为 15, 则 $a =$ _____.(用数字填写答案)
- 24.(2015.I.10) $(x^2 + x + y)^5$ 的展开式中, $x^5 y^2$ 的系数为 ()
- A. 10 B. 20 C. 30 D. 60
- 25.(2015.II.15) $(a + x)(1 + x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32, 则 $a =$ _____.

11 排列组合、二项式定理

湖南师大附中, 数学教研组, 张湘君

1.(2007.I.10) $(x^2 - \frac{1}{x})^n$ 的展开式中, 常数项为 15, 则 $n =$ ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

分析: $(x^2 - \frac{1}{x})^n$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_n^r x^{(2n-2r)} x^{(-r)} = C_n^r x^{(2n-3r)}$, 若常数项为 15, 令

$$\begin{cases} 2n-3r=0 \\ C_n^r=15 \end{cases}, \begin{cases} n=6 \\ r=4 \end{cases}, \text{选 D.}$$

2.(2007.I.13) 从班委会 5 名成员中选出 3 名, 分别担任班级学习委员、文娱委员与体育委员, 其中甲、乙二人不能担任文娱委员, 则不同的选法共有_____种. (用数字作答)

分析: 填 36. 从班委会 5 名成员中选出 3 名, 共 A_5^3 种; 其中甲、乙之一担任文娱委员的 $A_2^1 A_4^2$ 种, 则不同的选法共有 $A_5^3 - A_2^1 A_4^2 = 36$ 种.

3.(2007.II.10) 从 5 位同学中选派 4 位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天, 要求星期五有 2 人参加, 星期六、星期日各有 1 人参加, 则不同的选派方法共有()

- A. 40 种 B. 60 种 C. 100 种 D. 120 种

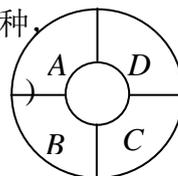
分析: B.

4.(2007.II.13) $(1+2x^2)(x-\frac{1}{x})^8$ 的展开式中常数项为_____ . (用数字作答)

分析: -42.

5.(2008.I.12) 如图, 一环形花坛分成 A, B, C, D 四块, 现有 4 种不同的花供选种, 要求在每块里种 1 种花, 且相邻的 2 块种不同的花, 则不同的种法总数为()

- A. 96 B. 84 C. 60 D. 48



分析: B. 分三类: 种两种花有 A_4^2 种种法; 种三种花有 $2A_4^3$ 种种法; 种四种花有 A_4^4 种种法.

共有 $A_4^2 + 2A_4^3 + A_4^4 = 84$.

另解: 按 A-B-C-D 顺序种花, 可分 A、C 同色与不同色有 $4 \times 3 \times (1 \times 3 + 2 \times 2) = 84$

6.(2008.II.7) $(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x 的系数是 ()

- A. -4 B. -3 C. 3 D. 4

分析: B

【解析】 $C_6^0 C_4^2 + C_6^2 C_4^0 - C_6^1 C_4^1 = 6 + 15 - 24 = -3$

【易错提醒】 容易漏掉 $C_6^1 C_4^1$ 项或该项的负号

7.(2009.I.5) 甲组有 5 名男同学, 3 名女同学; 乙组有 6 名男同学、2 名女同学。若从甲、乙两组中各选出 2 名同学, 则选出的 4 人中恰有 1 名女同学的不同选法共有 ()

- A. 150 种 B. 180 种 C. 300 种 D. 345 种

分析: D. 分两类(1) 甲组中选出一名女生有 $C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 = 225$ 种选法;...

(2) 乙组中选出一名女生有 $C_5^2 \cdot C_6^1 \cdot C_2^1 = 120$ 种选法. 故共有 345 种选法. 选 D

8.(2009.I.13) $(x-y)^{10}$ 的展开式中, x^7y^3 的系数与 x^3y^7 的系数之和等于_____.

分析: $-C_{10}^3 + (-C_{10}^7) = -2C_{10}^3 = -240$.

9.(2009.II.10) 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门。则甲、乙所选的课程中至少有 1 门不相同的选法共有 ()

- A. 6 种 B. 12 种 C. 30 种 D. 36 种

分析: 用间接法即可. $C_4^2 \cdot C_4^2 - C_4^2 = 30$ 种. 故选 C

10.(2009.II.13) $(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为_____.

分析: $(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})^4 = x^2y^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4$, 只需求 $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4$ 展开式中的含 xy 项的系数:

$$C_4^2 = 6$$

11.(2010.I.5) $(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5$ 的展开式中 x 的系数是 ()

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

分析: C 【解析】 $(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5 = \left(1+6x^{\frac{1}{2}}+12x+8x^{\frac{3}{2}}\right)\left(1-5x^{\frac{1}{3}}+10x^{\frac{2}{3}}-10x+5x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{5}{3}}\right)$

x 的系数是 $-10+12=2$

12.(2010.I.6) 某校开设 A 类选修课 3 门, B 类选择课 4 门, 一位同学从中共选 3 门, 若要求两类课程中各至少选一门, 则不同的选法共有 ()

- A. 30 种 B. 35 种 C. 42 种 D. 48 种

分析: A 【命题意图】本小题主要考查分类计数原理、组合知识, 以及分类讨论的数学思想. 【解析 1】: 可分以下 2 种情况: (1) A 类选修课选 1 门, B 类选修课选 2 门, 有 $C_3^1C_4^2$ 种不同的选法; (2) A 类选修课选 2 门, B 类选修课选 1 门, 有 $C_3^2C_4^1$ 种不同的选法.

所以不同的选法共有 $C_3^1C_4^2 + C_3^2C_4^1 = 18+12=30$ 种. 【解析 2】 $C_7^3 - C_3^3 - C_4^3 = 30$

13.(2011.I.8) $\left(x + \frac{a}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2, 则该展开式中常数项为()

- A. -40 B. -20 C. 20 D. 40

分析: 解析 1. 令 $x=1$ 得 $a=1$. 故原式 = $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$. $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的通项

$T_{r+1} = C_5^r (2x)^{5-2r} (-x^{-1})^r = C_5^r (-1)^r 2^{5-r} x^{5-2r}$, 由 $5-2r=1$ 得 $r=2$, 对应的常数项=80, 由 $5-2r=-1$ 得 $r=3$, 对应的常数项=-40, 故所求的常数项为 40, 选 D

解析 2. 用组合提取法, 把原式看做 6 个因式相乘, 若第 1 个括号提出 x , 从余下的 5 个括号中选 2 个提出 x , 选 3 个提出 $\frac{1}{x}$; 若第 1 个括号提出 $\frac{1}{x}$, 从余下的括号中选 2 个提出 $\frac{1}{x}$, 选 3 个提出 x .

故常数项 = $X \cdot C_5^2 (2X)^2 \cdot C_3^3 \left(-\frac{1}{X}\right)^3 + \frac{1}{X} \cdot C_5^2 \left(-\frac{1}{X}\right)^2 \cdot C_3^3 (2X)^3 = -40 + 80 = 40$

14.(2011.II.7) 某同学有同样的画册 2 本, 同样的集邮册 3 本, 从中取出 4 本赠送给 4 位朋友每位朋友 1 本, 则不同的赠送方法共有 ()

- A. 4 种 B. 10 种 C. 18 种 D. 20 种

分析: B

【命题意图】 本题主要考查两个原理与排列组合知识, 考察考生分析问题的能力.

【解析】 分两类: 一是取出 1 本画册, 3 本集邮册, 此时赠送方法有 $C_4^1 = 4$ 种;

二是取出 2 本画册, 2 本集邮册, 此时赠送方法有 $C_4^2 = 6$ 种. 故赠送方法共有 10 种.

15.(2011.II.13) $(1 - \sqrt{x})^{20}$ 的二项展开式中, x 的系数与 x^9 的系数之差为_____.

分析: 0

【命题意图】 本题主要考查二项展开式的通项公式和组合数的性质.

【解析】 由 $T_{r+1} = C_{20}^r (-\sqrt{x})^r = (-1)^r C_{20}^r x^{\frac{r}{2}}$ 得 x 的系数为 C_{20}^2 , x^9 的系数为 C_{20}^{18} , 而 $C_{20}^{18} = C_{20}^2$, 所以 x 的系数与 x^9 的系数之差为 0.

16.(2012.I.2) 将 2 名教师, 4 名学生分成 2 个小组, 分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动, 每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成, 不同的安排方案共有 ()

- (A) 12 种 (B) 10 种 (C) 9 种 (D) 8 种

分析: 选 A, 甲地由 1 名教师和 2 名学生: $C_2^1 C_4^2 = 12$ 种.

17.(2012.II.11) 将字母 a, a, b, b, c, c 排成三行两列, 要求每行的字母互不相同, 每列的字母也互不相同, 则不同的排列方法共有 ()

- A. 12 种 B. 18 种 C. 24 种 D. 36 种

分析: A 【命题意图】 本试题考查了排列组合的用途.

【解析】 利用分步计数原理, 先填写最左上角的数, 有 3 种, 再填写右上角的数为 2 种, 在填写第二行第一列的数有 2 种, 一共有 $3 \times 2 \times 2 = 12$.

25.(2015.II.15) $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】

试题分析: 由已知得 $(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$, 故 $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项分别为 $4ax$, $4ax^3$, x , $6x^3$, x^5 , 其系数之和为 $4a+4a+1+6+1=32$, 解得 $a=3$.

【考点定位】 二项式定理.

【名师点睛】 本题考查二项式定理, 准确写出二项展开式, 能正确求出奇数次幂项以及相应的系数和, 从而列方程求参数值, 属于中档题.