

## 11 排列组合、二项式定理

湖南师大附中, 数学教研组, 张湘君

1.(2007.I.10)  $(x^2 - \frac{1}{x})^n$  的展开式中, 常数项为 15, 则  $n =$  ( )

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

2.(2007.I.13) 从班委会 5 名成员中选出 3 名, 分别担任班级学习委员、文娱委员与体育委员, 其中甲、乙二人不能担任文娱委员, 则不同的选法共有\_\_\_\_\_种. (用数字作答)

3.(2007.II.10) 从 5 位同学中选派 4 位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天, 要求星期五有 2 人参加, 星期六、星期日各有 1 人参加, 则不同的选派方法共有( )

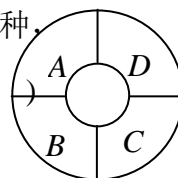
- A. 40 种                      B. 60 种                      C. 100 种                      D. 120 种

4.(2007.II.13)  $(1+2x^2)(x-\frac{1}{x})^8$  的展开式中常数项为\_\_\_\_\_ . (用数字作答)

5.(2008.I.12) 如图, 一环形花坛分成 A, B, C, D 四块, 现有 4 种不同的花供选种,

要求在每块里种 1 种花, 且相邻的 2 块种不同的花, 则不同的种法总数为( )

- A. 96                      B. 84                      C. 60                      D. 48



6.(2008.II.7)  $(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$  的展开式中  $x$  的系数是 ( )

- A. -4                      B. -3                      C. 3                      D. 4

7.(2009.I.5) 甲组有 5 名男同学, 3 名女同学; 乙组有 6 名男同学、2 名女同学。若从甲、乙两组中各选出 2 名同学, 则选出的 4 人中恰有 1 名女同学的不同选法共有 ( )

- A. 150 种                      B. 180 种                      C. 300 种                      D. 345 种

8.(2009.I.13)  $(x-y)^{10}$  的展开式中,  $x^7y^3$  的系数与  $x^3y^7$  的系数之和等于\_\_\_\_\_.

9.(2009.II.10) 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门。则甲、乙所选的课程中至少有 1 门不相同的选法共有 ( )

- A. 6 种                      B. 12 种                      C. 30 种                      D. 36 种

10.(2009.II.13)  $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4$  的展开式中  $x^3y^3$  的系数为\_\_\_\_\_.

11.(2010.I.5)  $(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5$  的展开式中  $x$  的系数是 ( )

- A. -4                      B. -2                      C. 2                      D. 4

12.(2010.I.6) 某校开设 A 类选修课 3 门, B 类选择课 4 门, 一位同学从中共选 3 门, 若要求两类课程中各至少选一门, 则不同的选法共有 ( )

- A. 30 种                      B. 35 种                      C. 42 种                      D. 48 种

- 13.(2011.I.8)  $\left(x + \frac{a}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$  的展开式中各项系数的和为 2, 则该展开式中常数项为( )
- A. -40                      B. -20                      C. 20                      D. 40
- 14.(2011.II.7) 某同学有同样的画册 2 本, 同样的集邮册 3 本, 从中取出 4 本赠送给 4 位朋友每位朋友 1 本, 则不同的赠送方法共有 ( )
- A. 4 种                      B. 10 种                      C. 18 种                      D. 20 种
- 15.(2011.II.13)  $(1 - \sqrt{x})^{20}$  的二项展开式中,  $x$  的系数与  $x^9$  的系数之差为\_\_\_\_\_.
- 16.(2012.I.2) 将 2 名教师, 4 名学生分成 2 个小组, 分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动, 每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成, 不同的安排方案共有 ( )
- (A) 12 种                      (B) 10 种                      (C) 9 种                      (D) 8 种
- 17.(2012.II.11) 将字母  $a, a, b, b, c, c$  排成三行两列, 要求每行的字母互不相同, 每列的字母也互不相同, 则不同的排列方法共有 ( )
- A. 12 种                      B. 18 种                      C. 24 种                      D. 36 种
- 18.(2012.II.15) 若  $(x + \frac{1}{x})^n$  的展开式中第 3 项与第 7 项的二项式系数相等, 则该展开式中  $\frac{1}{x^2}$  的系数为\_\_\_\_\_.
- 19.(2013.I.9) 设  $m$  为正整数,  $(x + y)^{2m}$  展开式的二项式系数的最大值为  $a$ ,  $(x + y)^{2m+1}$  展开式的二项式系数的最大值为  $b$ , 若  $13a = 7b$ , 则  $m =$  ( )
- A.5                      B.6                      C.7                      D.8
- 20.(2013.II.5) 已知  $(1 + ax)(1 + x)^5$  的展开式中  $x^2$  的系数为 5, 则  $a =$  ( )
- A. -4                      B. -3                      C. -2                      D. -1
- 21.(2014.I.5) 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动, 则周六、周日都有同学参加公益活动的概率 ( )
- A.  $\frac{1}{8}$                       B.  $\frac{3}{8}$                       C.  $\frac{5}{8}$                       D.  $\frac{7}{8}$
- 22.(2014.I.13)  $(x - y)(x + y)^8$  的展开式中  $x^2 y^2$  的系数为\_\_\_\_\_.(用数字填写答案)
- 23.(2014.II.13)  $(x + a)^{10}$  的展开式中,  $x^7$  的系数为 15, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.(用数字填写答案)
- 24.(2015.I.10)  $(x^2 + x + y)^5$  的展开式中,  $x^5 y^2$  的系数为 ( )
- A. 10                      B. 20                      C. 30                      D. 60
- 25.(2015.II.15)  $(a + x)(1 + x)^4$  的展开式中  $x$  的奇数次幂项的系数之和为 32, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

## 11 排列组合、二项式定理

湖南师大附中, 数学教研组, 张湘君

1.(2007.I.10)  $(x^2 - \frac{1}{x})^n$  的展开式中, 常数项为 15, 则  $n =$  ( )

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

分析:  $(x^2 - \frac{1}{x})^n$  的展开式的通项公式为  $T_{r+1} = C_n^r x^{(2n-2r)} x^{(-r)} = C_n^r x^{(2n-3r)}$ , 若常数项为 15, 令

$$\begin{cases} 2n-3r=0 \\ C_n^r=15 \end{cases}, \begin{cases} n=6 \\ r=4 \end{cases}, \text{选 D.}$$

2.(2007.I.13) 从班委会 5 名成员中选出 3 名, 分别担任班级学习委员、文娱委员与体育委员, 其中甲、乙二人不能担任文娱委员, 则不同的选法共有\_\_\_\_\_种. (用数字作答)

分析: 填 36. 从班委会 5 名成员中选出 3 名, 共  $A_5^3$  种; 其中甲、乙之一担任文娱委员的  $A_2^1 A_4^2$  种, 则不同的选法共有  $A_5^3 - A_2^1 A_4^2 = 36$  种.

3.(2007.II.10) 从 5 位同学中选派 4 位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天, 要求星期五有 2 人参加, 星期六、星期日各有 1 人参加, 则不同的选派方法共有( )

- A. 40 种                      B. 60 种                      C. 100 种                      D. 120 种

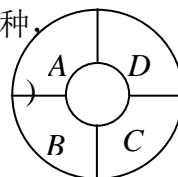
分析: B.

4.(2007.II.13)  $(1+2x^2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$  的展开式中常数项为\_\_\_\_\_ . (用数字作答)

分析: -42.

5.(2008.I.12) 如图, 一环形花坛分成 A, B, C, D 四块, 现有 4 种不同的花供选种, 要求在每块里种 1 种花, 且相邻的 2 块种不同的花, 则不同的种法总数为( )

- A. 96                      B. 84                      C. 60                      D. 48



分析: B. 分三类: 种两种花有  $A_4^2$  种种法; 种三种花有  $2A_4^3$  种种法; 种四种花有  $A_4^4$  种种法.

共有  $A_4^2 + 2A_4^3 + A_4^4 = 84$ .

另解: 按 A-B-C-D 顺序种花, 可分 A、C 同色与不同色有  $4 \times 3 \times (1 \times 3 + 2 \times 2) = 84$

6.(2008.II.7)  $(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$  的展开式中  $x$  的系数是 ( )

- A. -4                      B. -3                      C. 3                      D. 4

分析: B

【解析】  $C_6^0 C_4^2 + C_6^2 C_4^0 - C_6^1 C_4^1 = 6 + 15 - 24 = -3$

【易错提醒】容易漏掉  $C_6^1 C_4^1$  项或该项的负号

7.(2009.I.5) 甲组有 5 名男同学, 3 名女同学; 乙组有 6 名男同学、2 名女同学。若从甲、乙两组中各选出 2 名同学, 则选出的 4 人中恰有 1 名女同学的不同选法共有 ( )

- A. 150 种                      B. 180 种                      C. 300 种                      D. 345 种

分析: D. 分两类(1) 甲组中选出一名女生有  $C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 = 225$  种选法;...

(2) 乙组中选出一名女生有  $C_5^2 \cdot C_6^1 \cdot C_2^1 = 120$  种选法. 故共有 345 种选法. 选 D

8.(2009.I.13)  $(x-y)^{10}$  的展开式中,  $x^7y^3$  的系数与  $x^3y^7$  的系数之和等于\_\_\_\_\_.

分析:  $-C_{10}^3 + (-C_{10}^7) = -2C_{10}^3 = -240$ .

9.(2009.II.10) 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门。则甲、乙所选的课程中至少有 1 门不相同的选法共有 ( )

- A. 6 种                      B. 12 种                      C. 30 种                      D. 36 种

分析: 用间接法即可.  $C_4^2 \cdot C_4^2 - C_4^2 = 30$  种. 故选 C

10.(2009.II.13)  $(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})^4$  的展开式中  $x^3y^3$  的系数为\_\_\_\_\_.

分析:  $(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})^4 = x^2y^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4$ , 只需求  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4$  展开式中的含  $xy$  项的系数:

$$C_4^2 = 6$$

11.(2010.I.5)  $(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5$  的展开式中  $x$  的系数是 ( )

- A. -4                      B. -2                      C. 2                      D. 4

分析: C 【解析】  $(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5 = \left(1+6x^{\frac{1}{2}}+12x+8x^{\frac{3}{2}}\right) \left(1-5x^{\frac{1}{3}}+10x^{\frac{2}{3}}-10x+5x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{5}{3}}\right)$

$x$  的系数是  $-10+12=2$

12.(2010.I.6) 某校开设 A 类选修课 3 门, B 类选择课 4 门, 一位同学从中共选 3 门, 若要求两类课程中各至少选一门, 则不同的选法共有 ( )

- A. 30 种                      B. 35 种                      C. 42 种                      D. 48 种

分析: A 【命题意图】本小题主要考查分类计数原理、组合知识, 以及分类讨论的数学思想. 【解析 1】: 可分以下 2 种情况: (1) A 类选修课选 1 门, B 类选修课选 2 门, 有  $C_3^1C_4^2$  种不同的选法; (2) A 类选修课选 2 门, B 类选修课选 1 门, 有  $C_3^2C_4^1$  种不同的选法.

所以不同的选法共有  $C_3^1C_4^2 + C_3^2C_4^1 = 18+12=30$  种. 【解析 2】  $C_7^3 - C_3^3 - C_4^3 = 30$

13.(2011.I.8)  $\left(x + \frac{a}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$  的展开式中各项系数的和为 2, 则该展开式中常数项为( )

- A. -40                      B. -20                      C. 20                      D. 40

分析: 解析 1. 令  $x=1$  得  $a=1$ . 故原式 =  $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ .  $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$  的通项

$T_{r+1} = C_5^r (2x)^{5-2r} (-x^{-1})^r = C_5^r (-1)^r 2^{5-r} x^{5-2r}$ , 由  $5-2r=1$  得  $r=2$ , 对应的常数项=80, 由  $5-2r=-1$  得  $r=3$ , 对应的常数项=-40, 故所求的常数项为 40, 选 D

解析 2. 用组合提取法, 把原式看做 6 个因式相乘, 若第 1 个括号提出  $x$ , 从余下的 5 个括号中选 2 个提出  $x$ , 选 3 个提出  $\frac{1}{x}$ ; 若第 1 个括号提出  $\frac{1}{x}$ , 从余下的括号中选 2 个提出  $\frac{1}{x}$ , 选 3

个提出  $x$ . 故常数项 =  $X \cdot C_5^2 (2X)^2 \cdot C_3^3 \left(-\frac{1}{X}\right)^3 + \frac{1}{X} \cdot C_5^2 \left(-\frac{1}{X}\right)^2 \cdot C_3^3 (2X)^3 = -40 + 80 = 40$

14.(2011.II.7) 某同学有同样的画册 2 本, 同样的集邮册 3 本, 从中取出 4 本赠送给 4 位朋友每位朋友 1 本, 则不同的赠送方法共有 ( )

- A. 4 种                      B. 10 种                      C. 18 种                      D. 20 种

分析: B

【命题意图】 本题主要考查两个原理与排列组合知识, 考察考生分析问题的能力.

【解析】 分两类: 一是取出 1 本画册, 3 本集邮册, 此时赠送方法有  $C_4^1 = 4$  种;

二是取出 2 本画册, 2 本集邮册, 此时赠送方法有  $C_4^2 = 6$  种. 故赠送方法共有 10 种.

15.(2011.II.13)  $(1 - \sqrt{x})^{20}$  的二项展开式中,  $x$  的系数与  $x^9$  的系数之差为\_\_\_\_\_.

分析: 0

【命题意图】 本题主要考查二项展开式的通项公式和组合数的性质.

【解析】 由  $T_{r+1} = C_{20}^r (-\sqrt{x})^r = (-1)^r C_{20}^r x^{\frac{r}{2}}$  得  $x$  的系数为  $C_{20}^2$ ,  $x^9$  的系数为  $C_{20}^{18}$ , 而  $C_{20}^{18} = C_{20}^2$ , 所以  $x$  的系数与  $x^9$  的系数之差为 0.

16.(2012.I.2) 将 2 名教师, 4 名学生分成 2 个小组, 分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动, 每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成, 不同的安排方案共有 ( )

- (A) 12 种                      (B) 10 种                      (C) 9 种                      (D) 8 种

分析: 选 A, 甲地由 1 名教师和 2 名学生:  $C_2^1 C_4^2 = 12$  种.

17.(2012.II.11) 将字母  $a, a, b, b, c, c$  排成三行两列, 要求每行的字母互不相同, 每列的字母也互不相同, 则不同的排列方法共有 ( )

- A. 12 种                      B. 18 种                      C. 24 种                      D. 36 种

分析: A 【命题意图】 本试题考查了排列组合的用途.

【解析】 利用分步计数原理, 先填写最左上角的数, 有 3 种, 再填写右上角的数为 2 种, 在填写第二行第一列的数有 2 种, 一共有  $3 \times 2 \times 2 = 12$ .

18.(2012.II.15) 若  $(x+\frac{1}{x})^n$  的展开式中第 3 项与第 7 项的二项式系数相等, 则该展开式中  $\frac{1}{x^2}$  的系数为\_\_\_\_\_.

分析: 56

【命题意图】本试题主要考查了二项式定理中通项公式的运用。利用二项式系数相等, 确定了  $n$  的值, 然后进一步借助于通项公式, 分析项的系数。

【解析】根据已知条件可知  $C_n^2 = C_n^6 \Leftrightarrow n = 2 + 6 = 8$ ,

所以  $(x+\frac{1}{x})^8$  的展开式的通项为  $T_{r+1} = C_8^r x^{8-r}$ , 令  $8-2r = -2 \Leftrightarrow r = 5$

所以所求系数为  $C_8^5 = 56$ 。

19.(2013.I.9) 设  $m$  为正整数,  $(x+y)^{2m}$  展开式的二项式系数的最大值为  $a$ ,  $(x+y)^{2m+1}$  展开式的二项式系数的最大值为  $b$ , 若  $13a = 7b$ , 则  $m =$  ( )

A.5                      B.6                      C.7                      D.8

分析: B.

20.(2013.II.5) 已知  $(1+ax)(1+x)^5$  的展开式中  $x^2$  的系数为 5, 则  $a =$  ( )

A. -4                      B. -3                      C. -2                      D. -1

分析: D.

21.(2014.I.5) 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动, 则周六、周日都有同学参加公益活动的概率 ( )

A.  $\frac{1}{8}$                       B.  $\frac{3}{8}$                       C.  $\frac{5}{8}$                       D.  $\frac{7}{8}$

分析: D.

22.(2014.I.13)  $(x-y)(x+y)^8$  的展开式中  $x^2y^2$  的系数为\_\_\_\_\_.(用数字填写答案)

分析: -20.

23.(2014.II.13)  $(x+a)^{10}$  的展开式中,  $x^7$  的系数为 15, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.(用数字填写答案)

分析:  $\frac{1}{2}$ .

24.(2015.I.10)  $(x^2+x+y)^5$  的展开式中,  $x^5y^2$  的系数为 ( )

A. 10                      B. 20                      C. 30                      D. 60

【答案】C

【解析】在  $(x^2+x+y)^5$  的 5 个因式中, 2 个取因式中  $x^2$  剩余的 3 个因式中 1 个取  $x$ , 其余因式取  $y$ , 故  $x^5y^2$  的系数为  $C_5^2 C_3^1 C_2^2 = 30$ , 故选 C.

【考点定位】本题主要考查利用排列组合知识计算二项式展开式某一项的系数。

【名师点睛】本题利用排列组合求多项展开式某一项的系数, 试题形式新颖, 是中档题, 求多项展开式某一项的系数问题, 先分析该项的构成, 结合所给多项式, 分析如何得到该项, 再利用排列组知识求解。

25.(2015.II.15)  $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中  $x$  的奇数次幂项的系数之和为 32, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**【答案】** 3

**【解析】**

试题分析: 由已知得  $(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$ , 故  $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中  $x$  的奇数次幂项分别为  $4ax$ ,  $4ax^3$ ,  $x$ ,  $6x^3$ ,  $x^5$ , 其系数之和为  $4a+4a+1+6+1=32$ , 解得  $a=3$ .

**【考点定位】** 二项式定理.

**【名师点睛】** 本题考查二项式定理, 准确写出二项展开式, 能正确求出奇数次幂项以及相应的系数和, 从而列方程求参数值, 属于中档题.