9 圆锥曲线

湖南师大附中，数学教研组，张湘君

1.(2007.I.4) 已知双曲线的离心率为2，焦点是$(-4,0)$，$(4,0)$，则双曲线方程为(　　)

A．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　　B．$\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　C．$\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{6}=1$　　D．$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{10}=1$

2.(2007.I.11) 抛物线$y^2=4x$的焦点为F，准线为l，经过F且斜率为$\sqrt{3}$的直线与抛物线在x轴上方的部分相交于点A，$AK\perp l$，垂足为K，则$\triangle AKF$的面积是　　(　　)

A．4　　B．$3\sqrt{3}$　　C．$4\sqrt{3}$　　D．8

3.(2007.I.21) 已知椭圆$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$．过$F_1$的直线交椭圆于$B,D$两点，过$F_2$的直线交椭圆于$A,C$两点，且$AC\perp BD$，垂足为$P$．

（Ⅰ）设P点的坐标为(x_0,y_0)，证明：$\dfrac{x_0^2}{3}+\dfrac{y_0^2}{2}<1$；

（Ⅱ）求四边形$ABCD$的面积的最小值．

4.(2007.II.11) 设F_1,F_2分别是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$的左、右焦点，若双曲线上存在点$A$，使$\angle F_1AF_2=90^\circ$且$|AF_1|=3|AF_2|$，则双曲线的离心率为　　(　　)

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　　D．$\sqrt{5}$

5.(2007.II.12) 设F为抛物线$y^2=4x$的焦点，A,B,C为该抛物线上三点，若$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，则$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$　　(　　)

A．9　　B．6　　C．4　　D．3

6.(2008.I.14) 已知抛物线$y=ax^2-1$的焦点是坐标原点，则以抛物线与两坐标轴的三个交点为顶点的三角形面积为____________.

7.(2008.I.15) 在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，$\cos B=-\dfrac{7}{18}$．若以A，B为焦点的椭圆经过点C，则该椭圆的离心率$e=$___________.

8.(2008.I.21) 双曲线的中心为原点O，焦点在x轴上，两条渐近线分别为l_1，l_2，经过右焦点F垂直于l_1的直线分别交l_1，l_2于A，B两点．已知$|\overrightarrow{OA}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{OB}|$成等差数列，且$\overrightarrow{BF}$与$\overrightarrow{FA}$同向．

（Ⅰ）求双曲线的离心率；

（Ⅱ）设AB被双曲线所截得的线段的长为4，求双曲线的方程．

9.(2008.II.9) 设$a>1$，则双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{(a+1)^2}=1$的离心率$e$的取值范围是 (　　)

A．$(\sqrt{2},2)$　　B．$(\sqrt{2},\sqrt{5})$　　C．$(2,5)$　　D．$(2,\sqrt{5})$

10.(2008.II.15) 已知F是抛物线C：$y^2=4x$的焦点，过F且斜率为1的直线交C于A，B两点．设$|FA|>|FB|$，则$|FA|$与$|FB|$的比值等于________.

11.(2008.II.21) 设椭圆中心在坐标原点，$A(2,0)$，$B(0,1)$是它的两个顶点，直线$y=kx(k>0)$与AB相交于点D，与椭圆相交于E、F两点．

（Ⅰ）若$\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$，求$k$的值；

（Ⅱ）求四边形$AEBF$面积的最大值．

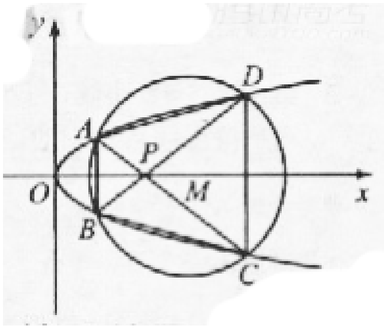
12.(2009.I.4) 设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 相切，则该双曲线的离心率等于 (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

13.(2009.I.12) 已知椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F,右准线为l，点$A\in l$，线段AF交C于点B，若$\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$,则$|\overrightarrow{AF}|=$ ( )

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 3

14.(2009.I.21) 如图，已知抛物线$E:y^2=x$与圆$M:(x-4)^2+y^2=r^2(r>0)$相交于A、B、C、D四个点。



（I）求r得取值范围;

（II）当四边形$ABCD$的面积最大时，求对角线AC、BD的交点P坐标.

15.(2009.II.9) 已知直线$y=k\left(x+2\right)\left(k>0\right)$与抛物线$C:y^2=8x$相交于$A$、$B$两点，$F$为$C$的焦点，若$|FA|=2|FB|$，则$k=$ ( )

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

16.(2009.II.11) 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的右焦点为$F$,过$F$且斜率为$\sqrt{3}$的直线交$C$于$A$、$B$两点，若$\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$,则$C$的离心率为 ( )

A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{9}{5}$

17.(2009.II.21) 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，过右焦点 F 的直线$l$与$C$相交于$A$、$B$两点，当$l$的斜率为 1 时，坐标原点$O$到$l$的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

（I）求a，b的值；

（II）C上是否存在点 P，使得当l绕 F 转到某一位置时，有$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$成立？若存在，求出所有的 P 的坐标与$l$的方程；若不存在，说明理由。

18.(2010.I.9) 已知F_1、F_2为双曲线 C:$x^2-y^2=1$的左、右焦点，点 p 在 C 上，$\angle F_1 p F_2=60^0$，则 P 到 x 轴的距离为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

19.(2010.I.16) 已知F是椭圆C的一个焦点，B是短轴的一个端点，线段BF的延长线交C于点D，且$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$，则C的离心率为_______________.

20.(2010.I.21) 已知斜率为 1 的直线l与双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$相交于$B$、$D$两点，且$BD$的中点为$M\left(1,3\right)$.

（Ⅰ）求C的离心率；

（Ⅱ）设C的右顶点为A，右焦点为F，$\left|DF\right|\bullet\left|BF\right|=17$，证明：过$A$、$B$、$D$三点的圆与$x$轴相切.

21.(2011.I.7) 设直线 L 过双曲线 C 的一个焦点，且与 C 的一条对称轴垂直，L 与 C 交于 A ,B 两点，$|AB|$ 为 C 的实轴长的 2 倍，则 C 的离心率为 ( )

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

22.(2011.I.14) 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的中心为原点，焦点 F_1,F_2 在 x 轴上，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。过 F_1 的直线 L 交 C 于 A,B 两点，且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 16，那么 C 的方程为______.

23.(2011.I.20) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A(0,-1)，B 点在直线 y = -3 上，M 点满足 $\overrightarrow{MB}//\overrightarrow{OA}$， $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BA}$，$M$ 点的轨迹为曲线 C。

（Ⅰ）求 C 的方程；

（Ⅱ）P 为 C 上的动点，l 为 C 在 P 点处得切线，求 O 点到 l 距离的最小值。

24.(2011.II.10) 已知抛物线 C： $y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 $y=2x-4$ 与 C 交于 A， B 两点．则 $\cos\angle AFB=$ ( )

A. $\dfrac{4}{5}$　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $-\dfrac{3}{5}$　　D. $-\dfrac{4}{5}$

25.(2011.II.15) 已知 F_1、F_2 分别为双曲线 C： $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$ 的左、右焦点，点 $A\in C$，点 M 的坐标为(2，0)， AM 为 $\angle F_1AF_2$ 的平分线．则 $|AF_2|=$________.

26.(2011.II.21) 已知 O 为坐标原点，F 为椭圆 C： $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 在 y 轴正半轴上的焦点，过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交与 A、B 两点，点 P 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

(I)证明：点 P 在 C 上；

(II)设点 P 关于点 O 的对称点为 Q，证明： A、P、B、Q 四点在同一圆上.

27.(2012.I.4) 设F_1F_2是椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$P$为直线$x=\frac{3a}{2}$上一点，$\Delta F_2PF_1$是底角为$30^\circ$的等腰三角形，则$E$的离心率为 (　　)

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $\frac{4}{5}$

28.(2012.I.8) 等轴双曲线C的中心在原点，焦点在x轴上，C与抛物线$y^2=16x$的准线交于A,B两点，$|AB|=4\sqrt{3}$；则C的实轴长为 (　　)

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $2\sqrt{2}$　　(C) 4　　(D) 8

29.(2012.I.20) 设抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点为F，准线为l，$A\in C$，已知以F为圆心，FA为半径的圆F交l于B,D两点；(lbyl fx)

（1）若$\angle BFD=90^0$，ΔABD的面积为$4\sqrt{2}$；求p的值及圆F的方程；

（2）若A,B,F三点在同一直线m上，直线n与m平行，且n与C只有一个公共点，求坐标原点到m,n距离的比值。

30.(2012.II.3) 椭圆的中心在原点，焦距为 4，一条准线为$x=-4$，则该椭圆的方程为(　　)

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$　　C. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$　　D. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

31.(2012.II.8) 已知F_1,F_2为双曲线$C:x^2-y^2=2$的左右焦点，点P在C上，$|PF_1|=2|PF_2|$，则$\cos\angle F_1PF_2=$ (　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

32.(2012.II.21) 已知抛物线$C: y=(x+1)^2$与圆$M:(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=r^2(r>0)$ 有一个公共点A，且在A处两曲线的切线为同一直线l。

（1）求r；

（2）设m、n是异于l且与C及M都相切的两条直线，m、n的交点为D，求D到l的距离。

33.(2013.I.4) 已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，则$C$的渐近线方程为 ( )

A. $y=\pm\frac{1}{4}x$　　B. $y=\pm\frac{1}{3}x$　　C. $y=\pm\frac{1}{2}x$　　D. $y=\pm x$

34.(2013.I.10) 已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(3,0)$，过点$F$的直线交椭圆于$A,B$两点。若$AB$的中点坐标为$(1,-1)$，则$E$的方程为 ( )

A. $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$　　B. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$　　C. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$　　D. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

35.(2013.II.11) 设抛物线$C: y^2=2px(p>0)$的焦点为F，点M在C上，$|MF|=5$，若以MF为直径的圆过点$(0,2)$，则C的方程为 ( )

A. $y^2=4x$或$y^2=8x$　　B. $y^2=2x$或$y^2=8x$

C. $y^2=4x$或$y^2=16x$　　D. $y^2=2x$或$y^2=16x$

36.(2013.II.20) 平面直角坐标系xOy中，过椭圆$M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点$F$作直$x+y-\sqrt{3}=0$交$M$于$A,B$两点，$P$为$AB$的中点，且$OP$的斜率为$\frac{1}{2}$.

(I) 求M的方程；

(II) C,D为M上的两点，若四边形$ABCD$的对角线$CD\perp AB$，求四边形$ABCD$面积的最大值.

37.(2014.I.4) 已知F是双曲线C： $x^2-my^2=3m(m>0)$的一个焦点，则点F到C的一条渐近线的距离为 (　　)

$A.\sqrt{3}$　　　　$B.3$　　　　$C.\sqrt{3}m$　　　　$D.3m$

38.(2014.I.10) 已知抛物线C： $y^2=8x$的焦点为F，准线为l，P是l上一点，Q是直线PF与C的一个焦点，若$\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则$|QF|=$ (　　)

$A.\frac{7}{2}$　　　　$B.\frac{5}{2}$　　　　$C.3$　　　　$D.2$

39.(2014.I.20) 已知点A（0，-2），椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$F$是椭圆的焦点，直线$AF$的斜率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$O$为坐标原点.

（Ⅰ）求E的方程;

（Ⅱ）设过点A的直线l与E相交于P,Q两点，当ΔOPQ的面积最大时，求l的方程.

40.(2014.II.10) 设F为抛物线C: $y^2=3x$的焦点，过F且倾斜角为30°的直线交C于A,B两点，O为坐标原点，则△ OAB的面积为 (　　)

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　　　B. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$　　　　C. $\frac{63}{32}$　　　　D. $\frac{9}{4}$

41.(2014.II.20) 设F_1,F_2分别是椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左,右焦点,M是C上一点且$MF_2$与$x$轴垂直，直线$MF_1$与C的另一个交点为N.

（Ⅰ）若直线MN的斜率为$\frac{3}{4}$，求C的离心率;

（Ⅱ）若直线MN在y轴上的截距为2，且$|MN|=5|F_1N|$，求a,b.

42.(2015.I.5) 已知 M（x_0,y_0）是双曲线 C：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$上的一点，F_1,F_2是 C 上的两个焦点，若$\overrightarrow{MF_1}\bullet\overrightarrow{MF_2}<0$，则$y_0$的取值范围是 (　　)

A.（-$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$） B.（-$\frac{\sqrt{3}}{6}$，$\frac{\sqrt{3}}{6}$） C.（$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\frac{2\sqrt{2}}{3}$） D.（$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$）

43.(2015.I.14) 一个圆经过椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$的三个顶点，且圆心在 x 轴的正半轴上，则该圆的标准方程为___________.

44.(2015.I.20) 在直角坐标系 xoy 中，曲线 C：$y=\frac{x^2}{4}$与直线$y=kx+a$ ($a>0$)交与 M,N 两点，

（Ⅰ）当 $k=0$ 时，分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程；

（Ⅱ）y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有∠OPM=∠OPN？说明理由.

45.(2015.II.11) 已知 A，B 为双曲线 E 的左，右顶点，点 M 在 E 上，ΔABM 为等腰三角形，且顶角为 120°，则 E 的离心率为 (　　)

A．$\sqrt{5}$ B．2 C．$\sqrt{3}$ D．$\sqrt{2}$

46.(2015.II.20) 已知椭圆$C:9x^2+y^2=m^2(m>0)$,直线l不过原点O且不平行于坐标轴，l与C有两个交点A，B，线段AB的中点为M.

(Ⅰ)证明：直线OM的斜率与l的斜率的乘积为定值；

（Ⅱ）若l过点$(\frac{m}{3},m)$，延长线段OM与C交于点P，四边形$OAPB$能否为平行四边形？若能，求此时l的斜率，若不能，说明理由.

9 圆锥曲线

湖南师大附中，数学教研组，张湘君

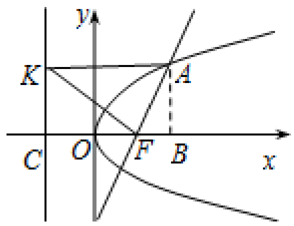
1.(2007.I.4) 已知双曲线的离心率为 2，焦点是 $(-4,0)$， $(4,0)$，则双曲线方程为(　　　)

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　B. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$　　C. $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$　　D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{10}=1$

分析：由 $\frac{c}{a}=2$ 及焦点是 $(-4,0)$， $(4,0)$，得 $c=4$， $a=2$， $a^2=4$， ∴ $b^2=c^2-a^2=12$， ∴双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$． 故选 A.

2.(2007.I.11) 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A， $AK\perp l$，垂足为 K，则 $\triangle AKF$ 的面积是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　　)

A. 4　　　　B. $3\sqrt{3}$　　　　C. $4\sqrt{3}$　　　　D. 8

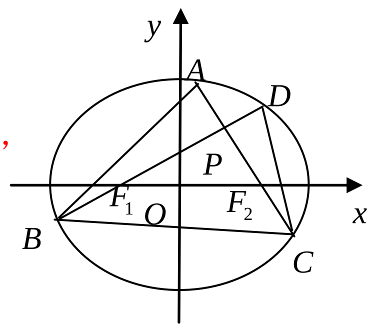


分析：如图，过 A 作 AB⊥x 轴于 B，设准线 l 与 x 轴交点为 C，直线 FA: $y=\sqrt{3}(x-1)$，代入 $y^2=4x$，解得 $x_A=3$，$y_A=2\sqrt{3}$，∴S 矩形 ABCK$=2\sqrt{3}\times(3+1)=8\sqrt{3}$，∴ $S_{\triangle AFK}=\frac{1}{2}$S 矩形 ABCK$=4\sqrt{3}$． 选 C.

3.(2007.I.21) 已知椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1， F_2． 过 F_1 的直线交椭圆于 B，D 两点，过 F_2 的直线交椭圆于 A，C 两点，且 $AC\perp BD$，垂足为 P．

（Ⅰ）设 P 点的坐标为 $(x_0，y_0)$，证明：$\frac{x_0^2}{3}+\frac{y_0^2}{2}<1$；

（Ⅱ）求四边形 $ABCD$ 的面积的最小值．



分析：（Ⅰ）椭圆的半焦距 $c=\sqrt{3-2}=1$，

由 $AC\perp BD$ 知点 P 在以线段 F_1F_2 为直径的圆上，故 $x_0^2+y_0^2=1$，

所以，$\frac{x_0^2}{3}+\frac{y_0^2}{2}\leqslant\frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{2}=\frac{1}{2}<1$．

（Ⅱ)（ⅰ)当 BD 的斜率 k 存在且 $k\neq0$ 时，BD 的方程为 $y=k(x+1)$，代入椭圆方程 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，并化简得 $(3k^2+2)x^2+6k^2x+3k^2-6=0$． 设 $B(x_1，y_1)$， $D(x_2，y_2)$，则

$$x_1+x_2=-\frac{6k^2}{3k^2+2}，\quad x_1x_2=\frac{3k^2-6}{3k^2+2}$$

$|BD|=\sqrt{1+k^2}\bullet|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)\bullet\left[(x_2+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=\dfrac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{3k^2+2}$；

因为 AC 与 BC 相交于点 P，且 AC 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$，所以，$|AC|=\dfrac{4\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{k^2}+1\right)}{3\times\dfrac{1}{k^2}+2}=\dfrac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{2k^2+3}$．

四边形 $ABCD$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\bullet|BD||AC|=\dfrac{24(k^2+1)^2}{(3k^2+2)(2k^2+3)}\geqslant\dfrac{24(k^2+1)^2}{\left[\dfrac{(3k^2+2)+(2k^2+3)}{2}\right]^2}=\dfrac{96}{25}$．

当 $k^2=1$ 时，上式取等号．

（ⅱ）当 BD 的斜率 $k=0$ 或斜率不存在时，四边形 $ABCD$ 的面积 $S=4$．

综上，四边形 $ABCD$ 的面积的最小值为 $\dfrac{96}{25}$．

4.(2007.II.11) 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ 的左、右焦点，若双曲线上存在点 A，使 $\angle F_1AF_2=90^\circ$ 且 $|AF_1|=3|AF_2|$，则双曲线的离心率为　　　　(　　　)

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　　　C．$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　　　　D．$\sqrt{5}$

分析：B.

5.(2007.II.12) 设 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，A, B, C 为该抛物线上三点，若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$　　　　(　　　)

A．9　　　　B．6　　　　C．4　　　　D．3

分析：B.

6.(2008.I.14) 已知抛物线 $y=ax^2-1$ 的焦点是坐标原点，则以抛物线与两坐标轴的三个交点为顶点的三角形面积为____________.

分析：答案：2.由抛物线 $y=ax^2-1$ 的焦点坐标为 $(0,\dfrac{1}{4a}-1)$ 为坐标原点得，$a=\dfrac{1}{4}$，则 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ 与坐标轴的交点为 $(0,-1),(-2,0),(2,0)$，则以这三点围成的三角形的面积为 $\dfrac{1}{2}\times4\times1=2$

7.(2008.I.15) 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，$\cos B=-\dfrac{7}{18}$．若以 A, B 为焦点的椭圆经过点 C，则该椭圆的离心率 $e=$___________.

分析：$\frac{3}{8}$.设 $AB=BC=1$， $\cos B=-\frac{7}{18}$ 则 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=\frac{25}{9}$

$AC=\frac{5}{3}$， $2a=1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3},2c=1,e=\frac{2c}{2a}=\frac{3}{8}$.

8.(2008.I.21) 双曲线的中心为原点 O，焦点在 x 轴上，两条渐近线分别为 l_1，l_2，经过右焦点 F 垂直于 l_1 的直线分别交 l_1，l_2 于 A，B 两点．已知 $|\overrightarrow{OA}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{OB}|$ 成等差数列，且 $\overrightarrow{BF}$ 与 $\overrightarrow{FA}$ 同向．

（Ⅰ）求双曲线的离心率；

（Ⅱ）设 AB 被双曲线所截得的线段的长为 4，求双曲线的方程．

分析:（Ⅰ）设 $OA=m-d$ ，$AB=m$，$OB=m+d$， 由勾股定理可得: $(m-d)^2+m^2=(m+d)^2$

得： $d=\frac{1}{4}m$， $\tan\angle AOF=\frac{b}{a}$， $\tan\angle AOB=\tan 2\angle AOF=\frac{AB}{OA}=\frac{4}{3}$

由倍角公式 $\therefore \frac{2\frac{b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{4}{3}$， 解得 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$,则离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

（Ⅱ）过 F 直线方程为 $y=-\frac{a}{b}(x-c)$,与双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 联立

将 $a=2b$， $c=\sqrt{5}b$ 代入，化简有 $\frac{15}{4b^2}x^2-\frac{8\sqrt{5}}{b}x+21=0$

$$4=\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}$$

将数值代入，有 $4=\sqrt{5\left[\left(\frac{32\sqrt{5}b}{15}\right)^2-4\frac{28b^2}{5}\right]}$,解得 $b=3$， 故所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$.

9.(2008.II.9) 设 $a>1$，则双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{(a+1)^2}=1$ 的离心率 e 的取值范围是　　(　　　)

A. $(\sqrt{2},2)$　　　B. $(\sqrt{2},\sqrt{5})$　　　C. $(2,5)$　　　D. $(2,\sqrt{5})$

分析：**B**

【解析】 $e^2=(\frac{c}{a})^2=\frac{a^2+(a+1)^2}{a^2}=1+(1+\frac{1}{a})^2$， 因为 $\frac{1}{a}$ 是减函数，所以当 $a>1$ 时

$0<\frac{1}{a}<1$， 所以 $2<e^2<5$， 即 $\sqrt{2}<e<\sqrt{5}$

【高考考点】解析几何与函数的交汇点

10.(2008.II.15) 已知 F 是抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，过 F 且斜率为 1 的直线交 C 于 A，B 两点．设 $|FA|>|FB|$，则 $|FA|$ 与 $|FB|$ 的比值等于________．

分析：$3+2\sqrt{2}$

【解析】设 A（x_1，y_1）B（x_2，y_2）由 $\begin{cases} y=x-1 \\ y^2=4x \end{cases} \Rightarrow x^2-6x+1=0 \Rightarrow x_1=3+2\sqrt{2}$，$x_2=3-2\sqrt{2}$，

（$x_1>x_2$）；∴由抛物线的定义知 $\dfrac{|FA|}{|FB|}=\dfrac{x_1+1}{x_2+1}=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

【高考考点】直线与抛物线的位置关系，抛物线定义的应用

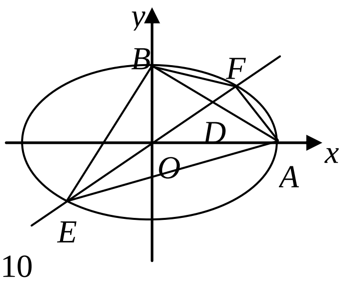
11.(2008.II.21) 设椭圆中心在坐标原点，$A(2,0)$，$B(0,1)$ 是它的两个顶点，直线 $y=kx(k>0)$ 与 AB 相交于点 D，与椭圆相交于 E、F 两点．

（Ⅰ）若 $\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$，求 k 的值；

（Ⅱ）求四边形 $AEBF$ 面积的最大值．

分析：（Ⅰ）解：依题设得椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，

直线 AB，EF 的方程分别为 $x+2y=2$，$y=kx(k>0)$． ··························2 分



如图，设 $D(x_0,kx_0)$，$E(x_1,kx_1)$，$F(x_2,kx_2)$，其中 $x_1<x_2$，

且 x_1，x_2 满足方程 $(1+4k^2)x^2=4$，故 $x_2=-x_1=\dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}}$． ①

由 $\overrightarrow{ED}=6\overrightarrow{DF}$ 知 $x_0-x_1=6(x_2-x_0)$，得 $x_0=\dfrac{1}{7}(6x_2+x_1)=\dfrac{5}{7}x_2=\dfrac{10}{7\sqrt{1+4k^2}}$；

由 D 在 AB 上知 $x_0+2kx_0=2$，得 $x_0=\dfrac{2}{1+2k}$．所以 $\dfrac{2}{1+2k}=\dfrac{10}{7\sqrt{1+4k^2}}$，

化简得 $24k^2-25k+6=0$，解得 $k=\dfrac{2}{3}$ 或 $k=\dfrac{3}{8}$． ·································6 分

（Ⅱ）解法一：根据点到直线的距离公式和①式知，点 E，F 到 AB 的距离分别为

$h_1=\dfrac{|x_1+2kx_1-2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2(1+2k+\sqrt{1+4k^2})}{\sqrt{5(1+4k^2)}}$，

$h_2=\frac{|x_2+2kx_2-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2(1+2k-\sqrt{1+4k^2})}{\sqrt{5(1+4k^2)}}$． ……………………………………9 分

又 $|AB|=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$，所以四边形 $AEBF$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|AB|(h_1+h_2)=\frac{1}{2}\bullet\sqrt{5}\bullet\frac{4(1+2k)}{\sqrt{5(1+4k^2)}}=\frac{2(1+2k)}{\sqrt{1+4k^2}}=2\sqrt{\frac{1+4k^2+4k}{1+4k^2}}\leqslant 2\sqrt{2},$$

当 $2k=1$，即当 $k=\frac{1}{2}$ 时，上式取等号．所以 S 的最大值为 $2\sqrt{2}$． …………12 分

解法二：由题设，$|BO|=1$，$|AO|=2$．

设 $y_1=kx_1$，$y_2=kx_2$，由①得 $x_2>0$，$y_2=-y_1>0$，

故四边形 $AEBF$ 的面积为 $S=S_{\triangle BEF}+S_{\triangle AEF}=x_2+2y_2$ …………………………9 分

$$=\sqrt{(x_2+2y_2)^2}=\sqrt{x_2^2+4y_2^2+4x_2y_2}\leqslant\sqrt{2(x_2^2+4y_2^2)}=2\sqrt{2},$$

当 $x_2=2y_2$ 时，上式取等号．所以 S 的最大值为 $2\sqrt{2}$． ………………………12 分

12.(2009.I.4) 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0,b＞0）的渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 相切，则该双曲线的离心率等于 (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

分析：C. 设切点 $P(x_0,y_0)$，则切线的斜率为 $y'|_{x=x_0}=2x_0$．由题意有 $\frac{y_0}{x_0}=2x_0$ 又 $y_0=x_0^2+1$

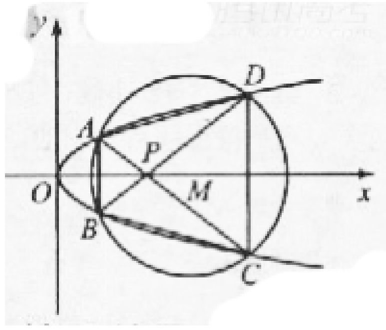
解得: $x_0^2=1,\therefore\frac{b}{a}=2,e=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{5}$.

13.(2009.I.12) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，右准线为 l，点 $A\in l$，线段 AF 交 C 于点 B，若 $\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$，则 $|\overrightarrow{AF}|=$ (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 3

分析：A. 过点 B 作 $BM\perp l$ 于 M,并设右准线 l 与 X 轴的交点为 N，易知 FN=1.由题意 $\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$，故 $|BM|=\frac{2}{3}$．又由椭圆的第二定义,得 $|BF|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ $\therefore|AF|=\sqrt{2}$．

14.(2009.I.21) 如图，已知抛物线$E:y^2=x$与圆$M:(x-4)^2+y^2=r^2(r>0)$相交于A、B、C、D四个点。



（I）求r得取值范围；

（II）当四边形$ABCD$的面积最大时，求对角线AC、BD的交点P坐标.

分析：（I）这一问学生易下手。将抛物线$E:y^2=x$与圆$M:(x-4)^2+y^2=r^2(r>0)$的方程联立，消去y^2，整理得$x^2-7x+16-r^2=0$. . . . .（＊）

抛物线$E:y^2=x$与圆$M:(x-4)^2+y^2=r^2(r>0)$相交于A、B、C、D四个点的充要条件是：

方程（＊）有两个不相等的正根即可.易得$r\in(\frac{\sqrt{15}}{2},4)$.考生利用数形结合及函数和方程的思想来处理也可以.

（II）考纲中明确提出不考查求两个圆锥曲线的交点的坐标。因此利用设而不求、整体代入的 方法处理本小题是一个较好的切入点.

设四个交点的坐标分别为$A(x_1,\sqrt{x_1})$、$B(x_1,-\sqrt{x_1})$、$C(x_2,-\sqrt{x_2})$、$D(x_2,\sqrt{x_2})$。

则由（I）根据韦达定理有$x_1+x_2=7,x_1x_2=16-r^2$，$r\in(\frac{\sqrt{15}}{2},4)$

则$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|x_2-x_1|(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})=|x_2-x_1|(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})$

$$\therefore S^2=[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2](x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2})=(7+2\sqrt{16-r^2})(4r^2-15)$$

令$\sqrt{16-r^2}=t$，则$S^2=(7+2t)^2(7-2t)$　　　下面求S^2的最大值。

方法一：利用三次均值求解。三次均值目前在两纲中虽不要求，但在处理一些最值问题有时很方便。它的主要手段是配凑系数或常数，但要注意取等号的条件，这和二次均值类似。

$$S^2=(7+2t)^2(7-2t)=\frac{1}{2}(7+2t)(7+2t)(14-4t)$$
$$\leq\frac{1}{2}(\frac{7+2t+7+2t+14-4t}{3})^3=\frac{1}{2}\cdot(\frac{28}{3})^3$$

当且仅当$7+2t=14-4t$，即$t=\frac{7}{6}$时取最大值。经检验此时$r\in(\frac{\sqrt{15}}{2},4)$满足题意。

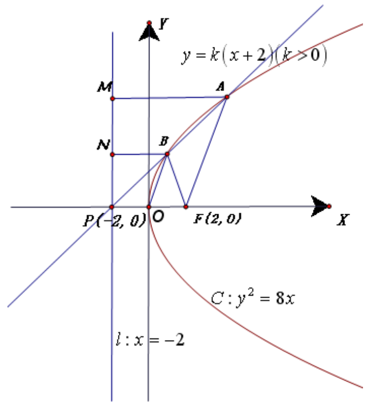
方法二：利用求导处理，这是命题人的意图。具体解法略。

下面来处理点 P 的坐标。设点 P 的坐标为：$P(x_p,0)$

由 A、P、C 三点共线，则 $\dfrac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{x_1-x_2}=\dfrac{\sqrt{x_1}}{x_1-x_p}$ 得 $x_p=\sqrt{x_1x_2}=t=\dfrac{7}{6}$。以下略。

15.(2009.II.9) 已知直线 $y=k(x+2)(k>0)$ 与抛物线 $C:y^2=8x$ 相交于 A、B 两点，F 为 C 的焦点，若 $|FA|=2|FB|$，则 $k=$ ( )

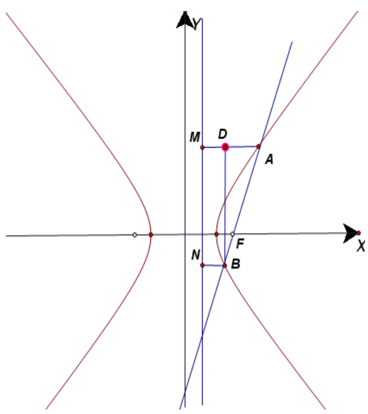
A. $\dfrac{1}{3}$ B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\dfrac{2}{3}$ D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$



分析：设抛物线 $C:y^2=8x$ 的准线为 $l:x=-2$ 直线 $y=k(x+2)(k>0)$ 恒过定点 P$(-2,0)$.如图过 A、B 分 别作 $AM\perp l$ 于 M , $BN\perp l$ 于 N，由 $|FA|=2|FB|$,则 $|AM|=2|BN|$,点 B 为 AP 的中点.连结 OB ,则 $|OB|=\dfrac{1}{2}|AF|$, $\therefore |OB|=|BF|$ 点 B 的横坐标为1，故点 B 的坐标为 $(1,2\sqrt{2})\therefore k=\dfrac{2\sqrt{2}-0}{1-(-2)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，**故选 D**

16.(2009.II.11) 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F ,过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于 A、B 两点，若 $\overline{AF}=4\overline{FB}$,则 C 的离心率为 ( )

A. $\dfrac{6}{5}$ B. $\dfrac{7}{5}$ C. $\dfrac{5}{8}$ D. $\dfrac{9}{5}$



分析：设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右准线为 l ,过 A、B 分 别作 $AM\perp l$ 于 M , $BN\perp l$ 于 N， $BD\perp AM$ 于 D,由直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$,知直线 AB 的倾斜角为 $60°\therefore\angle BAD=60°,|AD|=\dfrac{1}{2}|AB|$,

由双曲线的第二定义有 $|AM|-|BN|=|AD|=\dfrac{1}{e}(|\overrightarrow{AF}|-|\overrightarrow{FB}|)$

$=\dfrac{1}{2}|AB|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{AF}|+|\overrightarrow{FB}|)$.

又 $\because \overline{AF}=4\overline{FB}\therefore\dfrac{1}{e}\cdot 3|\overrightarrow{FB}|=\dfrac{5}{2}|\overrightarrow{FB}|\therefore e=\dfrac{6}{5}$ **故选 A**

17.(2009.II.21) 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，过右焦点 F 的直线$l$与$C$相交于$A$、$B$两点，当$l$的斜率为 1 时，坐标原点$O$到$l$的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

（I）求a，b的值；

（II）C上是否存在点 P，使得当l绕 F 转到某一位置时，有$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$成立？若存在，求出所有的 P 的坐标与$l$的方程；若不存在，说明理由。

分析：(I）设$F(c,0)$，直线$l:x-y-c=0$，由坐标原点O到l的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

则$\frac{|0-0-c|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$c=1$.又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3},\therefore a=\sqrt{3},b=\sqrt{2}$.

（II）由(I）知椭圆的方程为$C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.设$A(x_1,y_1)$、$B\ (x_2,y_2)$

由题意知l的斜率为一定不为 0，故不妨设 $l:x=my+1$

代入椭圆的方程中整理得$(2m^2+3)y^2+4my-4=0$，显然$\Delta>0$。

由韦达定理有：$y_1+y_2=-\frac{4m}{2m^2+3},\ y_1y_2=-\frac{4}{2m^2+3},$. . . . . ①

.假设存在点 P，使$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$成立，则其充要条件为：

点 P的坐标为(x_1+x_2,y_1+y_2)，点 P 在椭圆上，即$\frac{(x_1+x_2)^2}{3}+\frac{(y_1+y_2)^2}{2}=1$。

整理得$2x_1^2+3y_1^2+2x_2^2+3y_2^2+4x_1x_2+6y_1y_2=6$。

又A、B在椭圆上，即$2x_1^2+3y_1^2=6,2x_2^2+3y_2^2=6$.

故$2x_1x_2+3y_1y_2+3=0$. . . . . ②

将$x_1x_2=(my_1+1)(my_2+1)=m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1$及①代入②解得$m^2=\frac{1}{2}$

$\therefore y_1+y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$或$-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1+x_2=-\frac{4m^2}{2m^2+3}+2=\frac{3}{2}$,即$P(\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$.

当$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$P(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}),l:x=\frac{\sqrt{2}}{2}y+1$;

当 $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $P(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $l: x=-\frac{\sqrt{2}}{2}y+1$.

评析：处理解析几何题，学生主要是在“算”上的功夫不够。所谓“算”， 主要讲的是算理和算法。算法是解决问题采用的计算的方法,而算理是采用这种算法的依据和原因,一个是表,一个是里,一个是现象,一个是本质。有时候算理和算法并不是截然区分的。例如：三角形的面积是用底乘高的一半还是用两边与夹角的正弦的一半，还是分割成几部分来算？在具体处理的时候，要根据具体问题及题意边做边调整，寻找合适的突破口和切入点。

18.(2010.I.9) 已知 F_1、F_2 为双曲线 C: $x^2-y^2=1$ 的左、右焦点，点 p 在 C 上，$\angle F_1pF_2=60^0$，则 P 到 x 轴的距离为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

分析：B 【命题意图】本小题主要考查双曲线的几何性质、第二定义、余弦定理，考查转化的数学思想，通过本题可以有效地考查考生的综合运用能力及运算能力.

【解析 1】不妨设点 P (x_0,y_0) 在双曲线的右支,由双曲线的第二定义得

$|PF_1|=e[x_0-(-\frac{a^2}{c})]=a+ex_0=1+\sqrt{2}x_0$，$|PF_2|=e[x_0-\frac{a^2}{c})]=ex_0-a=\sqrt{2}x_0-1$.由余弦定理得

$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}$,即 $\cos 60^0=\frac{(1+\sqrt{2}x_0)^2+(\sqrt{2}x_0-1)^2-(2\sqrt{2})^2}{2(1+\sqrt{2}x_0)(\sqrt{2}x_0-1)}$,

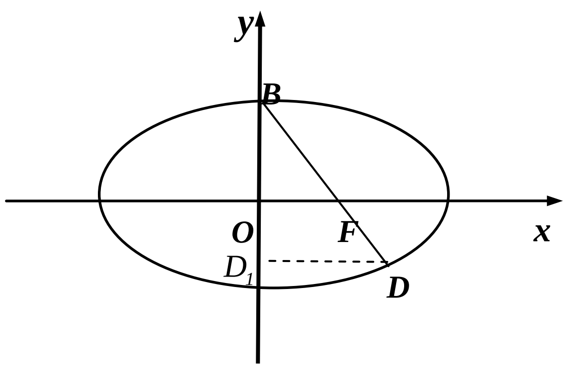
解得 $x_0^2=\frac{5}{2}$,所以 $y_0{}^2=x_0^2-1=\frac{3}{2}$，故 P 到 x 轴的距离为 $|y_0|=\frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析 2】由焦点三角形面积公式得：

$$S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\cot\frac{\theta}{2}=1^2\cot\frac{60^0}{2}=\sqrt{3}=\frac{1}{2}|2c|h=\frac{1}{2}|2\sqrt{2}|h\Rightarrow h=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

19.(2010.I.16) 已知 F 是椭圆 C 的一个焦点，B 是短轴的一个端点，线段 BF 的延长线交 C 于点 D，且 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$，则 C 的离心率为____________.

分析：$\frac{\sqrt{3}}{3}$【命题意图】本小题主要考查椭圆的方程与几何性质、第二定义、平面向量知识，考查了数形结合思想、方程思想,本题凸显解析几何的特点：“数研究形，形助数”，利用几何性质可寻求到简化问题的捷径.



【解析 1】如图，$|BF|=\sqrt{b^2+c^2}=a$，

作 $DD_1 \perp y$ 轴于点 D_1,则由 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$，得

$\frac{|OF|}{|DD_1|}=\frac{|BF|}{|BD|}=\frac{2}{3}$,所以 $|DD_1|=\frac{3}{2}|OF|=\frac{3}{2}c$,

即 $x_D=\frac{3c}{2}$,由椭圆的第二定义得 $|FD|=e(\frac{a^2}{c}-\frac{3c}{2})=a-\frac{3c^2}{2a}$

又由 $|BF|=2|FD|$,得 $c=2a-\frac{3c^2}{a}$,整理得 $3c^2-2a^2+ac=0$.

两边都除以 a^2,得 $3e^2+e-2=0$,解得 $e=-1$(舍去)，或 $e=\frac{2}{3}$.

【解析 2】设椭圆方程为：第一标准形式，F 分 BD 所成的比为 2，

$x_c=\frac{0+2x_2}{1+2}\Rightarrow x_2=\frac{3}{2}x_c=\frac{3}{2}c;y_c=\frac{b+2y_2}{1+2}\Rightarrow y_2=\frac{3y_c-b}{2}=\frac{3\cdot 0-b}{2}=-\frac{b}{2}$，带入

$\frac{9}{4}\frac{c^2}{a^2}+\frac{1}{4}\frac{b^2}{b^2}=1$， $\Rightarrow e=\frac{\sqrt{3}}{3}$

20.(2010.I.21) 已知斜率为 1 的直线 l 与双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 相交于 B、D 两点，且 BD 的中点为 $M(1,3)$.

（Ⅰ）求 C 的离心率；

（Ⅱ）设 C 的右顶点为 A，右焦点为 F，$|DF|\cdot|BF|=17$，证明：过 A、B、D 三点的圆与 x 轴相切.

分析：【命题意图】本题主要考查双曲线的方程及性质，考查直线与圆的关系，既考查考生的基础知识掌握情况，又可以考查综合推理的能力.

【参考答案】

（Ⅰ）由题设知，l 的方程为：$y=x+2$.

代入 C 的方程，并化简，得

$$(b^2-a^2)x^2-4a^2x-4a^2-a^2b^2=0.$$

设 $B(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{4a^2}{b^2-a^2}$，$x_1\cdot x_2=-\frac{4a^2+a^2b^2}{b^2-a^2}$， ①

由 $M(1,3)$ 为 BD 的中点知 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$，故

$$\frac{1}{2}\times\frac{4a^2}{b^2-a^2}=1,$$

即 $b^2=3a^2$， ②

故 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$，

所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=2$.

（Ⅱ）由①、②知，C的方程为：$3x^2-y^2=3a^2$，

$$A(a,0),\ F(2a,0),\ x_1+x_2=2,\ x_1\cdot x_2=-\frac{4+3a^2}{2}<0,$$

故不妨设$x_1\leqslant -a$，$x_2\geqslant a$.

$$|BF|=\sqrt{(x_1-2a)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-2a)^2+3x_1^2-3a^2}=a-2x_1,$$

$$|FD|=\sqrt{(x_2-2a)^2+y_2^2}=\sqrt{(x_2-2a)^2+3x_2^2-3a^2}=2x_2-a,$$

$$|BF|\cdot|FD|=(a-2x_1)(2x_2-a)$$

$$=-4x_1x_2+2a(x_1+x_2)-a^2$$

$$=5a^2+4a+8.$$

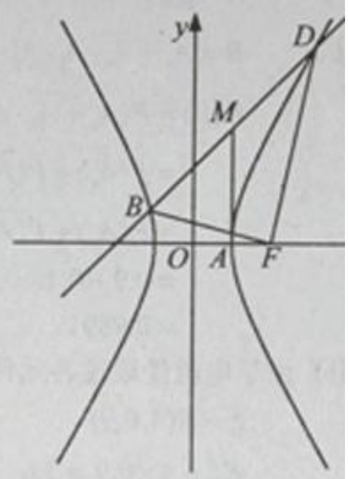
又　　$|BF|\cdot|FD|=17$，

故　　$5a^2+4a+8=17$，

解得$a=1$，或$a=-\dfrac{9}{5}$（舍去）.

故$|BD|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=6$.

连结MA，则由$A(1,0)$，$M(1,3)$知$|MA|=3$，从而$MA=MB=MD$，且$MA\perp x$轴，因此以M为圆心，MA为半径的圆经过A、B、D三点，且在点A处与x轴相切.



所以过A、B、D三点的圆与x轴相切.　　……

【点评】高考中的解析几何问题一般为综合性较强的题目，命题者将好多考点以圆锥曲线为背景来考查，如向量问题、三角形问题、函数问题等等，试题的难度相对比较稳定.

21.(2011.I.7) 设直线 L 过双曲线 C 的一个焦点，且与 C 的一条对称轴垂直，L 与 C 交于 A ,B 两点，$|AB|$为 C 的实轴长的 2 倍，则 C 的离心率为　　　　(　　　)

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 2　　　　D. 3

分析：通径|AB|=$\dfrac{2b^2}{a}=2a$ 得 $b^2=2a^2\Rightarrow a^2-c^2=2a^2$，选 B.

22.(2011.I.14) 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的中心为原点，焦点 F_1,F_2 在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。过 F_1 的直线 L 交 C 于 A,B 两点，且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 16，那么 C 的方程为______.

分析：由 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 4a=16\end{cases}$ 得 a=4.c= $2\sqrt{2}$,从而 b=8, $\therefore \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$ 为所求

23.(2011.I.20) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A(0,-1)，B 点在直线 y = -3 上，M 点满足 $\overrightarrow{MB}//\overrightarrow{OA}$， $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BA}$，$M$ 点的轨迹为曲线 C。

（Ⅰ）求 C 的方程;

（Ⅱ）P 为 C 上的动点，l 为 C 在 P 点处得切线，求 O 点到 l 距离的最小值。

分析：(Ⅰ)设 M(x,y),由已知得 B(x,-3),A(0,-1).所以 $\overrightarrow{MA}$ =（-x,-1-y）， $\overrightarrow{MB}$ =(0,-3-y), $\overrightarrow{AB}$ =(x,-2). 再由题意可知（ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ ）• $\overrightarrow{AB}$ =0, 即（-x,-4-2y）• (x,-2)=0.

所以曲线 C 的方程式为 y= $\frac{1}{4}x^2$ -2.

(Ⅱ)设 P(x_0,y_0)为曲线 C：y= $\frac{1}{4}x^2$ -2 上一点，因为 $y'=\frac{1}{2}x$,所以 l 的斜率为 $\frac{1}{2}x_0$

因此直线 l 的方程为 $y-y_0=\frac{1}{2}x_0(x-x_0)$，即 $x_0x-2y+2y_0-x_0^2=0$。

则 o 点到 l 的距离 $d=\frac{|2y_0-x_0^2|}{\sqrt{x_0^2+4}}$.又 $y_0=\frac{1}{4}x_0^2-2$，所以 $d=\frac{\frac{1}{2}x_0^2+4}{\sqrt{x_0^2+4}}=\frac{1}{2}(\sqrt{x_0^2+4}+\frac{4}{\sqrt{x_0^2+4}})\geq 2,$

当 x_0^2=0 时取等号，所以 o 点到 l 距离的最小值为 2.

24.(2011.II.10) 已知抛物线 C： $y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 $y=2x-4$ 与 C 交于 A，B 两点．则 $\cos\angle AFB=$ （　　）

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

分析：D

【命题意图】本题主要考查直线与抛物线的位置关系,余弦定理的应用.

【解析】联立 $\begin{cases}y^2=4x\\ y=2x-4\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-5x+4=0$,解得 $x=1,x=4$,不妨设 A 点在 x 轴的上方,于是 A， B 两点的坐标分别为(4,4),(1,−2),又 $F(1,0)$,可求得 $AB=3\sqrt{5},AF=5,BF=2$.

在$\triangle ABF$中,由余弦定理$\cos\angle AFB=\dfrac{AF^2+BF^2-AB^2}{2\times AF\times BF}=-\dfrac{4}{5}$.

25.(2011.II.15) 已知F_1、F_2分别为双曲线C: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$的左、右焦点，点$A\in C$，点$M$的坐标为(2，0)，$AM$为$\angle F_1AF_2$的平分线．则$|AF_2|=$________.

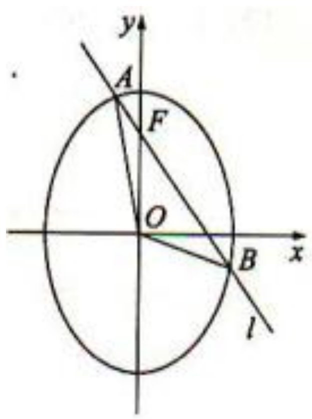
分析：6

【命题意图】本题主要考查三角形的内角平分线定理，双曲线的第一定义和性质.

【解析】$\because AM$为$\angle F_1AF_2$的平分线，$\therefore \dfrac{|AF_2|}{|AF_1|}=\dfrac{|MF_2|}{|MF_1|}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore |AF_1|=2|AF_2|$

又点$A\in C$，由双曲线的第一定义得$|AF_1|-|AF_2|=2|AF_2|-|AF_2|=|AF_2|=2a=6$.

26.(2011.II.21) 已知O为坐标原点，F为椭圆C：$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$在y轴正半轴上的焦点，过F且斜率为$-\sqrt{2}$的直线l与C交与A、B两点，点P满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.



(I)证明：点P在C上；

(II)设点P关于点O的对称点为Q，证明：A、P、B、Q四点在同一圆上.

分析：【命题意图】本题考查直线方程、平面向量的坐标运算、点与曲线的位置关系、曲线交点坐标求法及四点共圆的条件。

【解析】(I) $F(0,1)$，l的方程为$y=-\sqrt{2}x+1$，代入$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$并化简得$4x^2-2\sqrt{2}x-1=0$….2 分

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_3,y_3)$，则$x_1=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},x_2=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$,

$$x_1+x_2=\frac{\sqrt{2}}{2},y_1+y_2=-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2=1,$$

由题意得$x_3=-(x_1+x_2)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},y_3=-(y_1+y_2)=-1$，所以点$P$的坐标为$(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-1)$.

经验证点P的坐标$(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-1)$满足方程$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$，故点$P$在椭圆$C$上 …6 分

(II)由 $P\ (-\frac{\sqrt{2}}{2},-1)$ 和题设知， $Q\ (\frac{\sqrt{2}}{2},1)$， PQ 的垂直平分线 l_1 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x$.　　①

设 AB 的中点为 M ,则 $M(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2})$, AB 的垂直平分线 l_2 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{4}$.　　②

由①、②得 l_1、 l_2 的交点为 $N(-\frac{\sqrt{2}}{8},\frac{1}{8})$.　　…………………………9 分

$|NP|=\sqrt{(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8})^2+(-1-\frac{1}{8})^2}=\frac{3\sqrt{11}}{8}$, $|AB|=\sqrt{1+(-\sqrt{2})^2}\bullet|x_2-x_1|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $|AM|=\frac{3\sqrt{2}}{4}$,

$|MN|=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8})^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{8})^2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $|NA|=\sqrt{|AM|^2+|MN|^2}=\frac{3\sqrt{11}}{8}$,

故　$|NP|=|NA|$,又　$|NP|=|NQ|$, $|NA|=|NB|$,所以　$|NA|=|NP|=|NB|=|NQ|$,

由此知 A、 P、 B、 Q 四点在以 N 为圆心, NA 为半径的圆上. ……………12 分

【点评】本题涉及到平面微向量，有一定的综合性和计算量，完成有难度. 首先出题位置和平时模拟几乎没有变化，都保持全卷倒数第二道题的位置，这点考生非常适应的。相对来讲比较容易，是因为这道题最好特点没有任何的未知参数，我们看这道题椭圆完全给出，直线过了椭圆焦点，并且斜率也给出，平时做题斜率不给出，需要通过一定条件求出来，或者根本求不出来，这道题都给了，反而同学不知道怎么下手，让我求什么不知道，给出马上给向量条件，出了两道证明题，这个跟平时做的不太一样，证明题结论给大家，需要大家严谨推导出来，可能叙述的时候有不严谨的地方。这两问出的非常巧妙，非常涉及解析几何本质的内容，一个证明点在椭圆上的问题，还有一个疑问既然出现四点共圆，这都是平时很少涉及内容。从侧面体现教育深层次的问题，让学生掌握解析几何的本质，而不是把套路解决。其实几年前上海考到解析几何本质问题，最后方法用代数方法研究几何的问题，什么是四点共圆？首先在同一个圆上，首先找到圆心，四个点找圆形不好找，最简单的两个点怎么找？这是平时的知识，怎么找距离相等的点，一定在中垂线，两个中垂线交点必然是圆心，找到圆心再距离四个点距离相等，这就是简单的计算问题。方法确定以后计算量其实比往年少.

27.(2012.I.4) 设 F_1F_2 是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点， P 为直线 $x=\frac{3a}{2}$ 上一点，

$\Delta\ F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形，则 E 的离心率为　　(　　)

$(A)\ \frac{1}{2}$　　$(B)\ \frac{2}{3}$　　$(C)\ \frac{3}{4}$　　$(D)\ \frac{4}{5}$

分析：选 C

$\Delta\ F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形 $\Rightarrow|PF_2|=|F_2F_1|=2(\frac{3}{2}a-c)=2c\Leftrightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$

28.(2012.I.8) 等轴双曲线C的中心在原点，焦点在x轴上，C与抛物线$y^2=16x$的准线交于A,B两点，$|AB|=4\sqrt{3}$；则C的实轴长为 (　　)

$(A)\ \sqrt{2}$　　$(B)\ 2\sqrt{2}$　　$(C)\ 4$　　$(D)\ 8$

分析：选C.设$C:x^2-y^2=a^2(a>0)$交$y^2=16x$的准线$l:x=-4$于$A(-4,2\sqrt{3})$ $B(-4,-2\sqrt{3})$

得：$a^2=(-4)^2-(2\sqrt{3})^2=4\Leftrightarrow a=2\Leftrightarrow 2a=4$

29.(2012.I.20) 设抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点为F，准线为l，$A\in C$，已知以F为圆心，FA为半径的圆F交l于B,D两点；(lbyl fx)

（1）若$\angle BFD=90^0$，ΔABD的面积为$4\sqrt{2}$；求p的值及圆F的方程；

（2）若A,B,F三点在同一直线m上，直线n与m平行，且n与C只有一个公共点，求坐标原点到m,n距离的比值。

分析：（1）由对称性知：ΔBFD是等腰直角Δ，斜边$|BD|=2p$

点A到准线l的距离$d=|FA|=|FB|=\sqrt{2}p$，$S_{\Delta ABD}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\times|BD|\times d=4\sqrt{2}\Leftrightarrow p=2$

圆F的方程为$x^2+(y-1)^2=8$

（2）由对称性设$A(x_0,\frac{x_0^2}{2p})(x_0>0)$，则$F(0,\frac{p}{2})$

点A,B关于点F对称得：$B(-x_0,p-\frac{x_0^2}{2p})\Rightarrow p-\frac{x_0^2}{2p}=-\frac{p}{2}\Leftrightarrow x_0^2=3p^2$

得：$A(\sqrt{3}p,\frac{3p}{2})$，直线$m:y=\dfrac{\frac{3p}{2}-\frac{p}{2}}{\sqrt{3}p}x+\frac{p}{2}\Leftrightarrow x-\sqrt{3}y+\frac{\sqrt{3}p}{2}=0$

$x^2=2py\Leftrightarrow y=\frac{x^2}{2p}\Rightarrow y'=\frac{x}{p}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}p\Rightarrow$切点$P(\frac{\sqrt{3}p}{3},\frac{p}{6})$

直线$n:y-\frac{p}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\frac{\sqrt{3}p}{3})\Leftrightarrow x-\sqrt{3}y-\frac{\sqrt{3}}{6}p=0$

坐标原点到m,n距离的比值为$\frac{\sqrt{3}p}{2}:\frac{\sqrt{3}p}{6}=3$。

30.(2012.II.3) 椭圆的中心在原点，焦距为 4，一条准线为 $x=-4$，则该椭圆的方程为(　　)

A．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　　B．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$　　C．$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$　　D．$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

分析：C

【命题意图】本试题主要考查了椭圆的方程以及性质的运用。通过准线方程确定焦点位置，然后借助于焦距和准线求解参数 a,b,c，从而得到椭圆的方程。[来源:Z,xx,k.Com]

【解析】因为 $2c=4\Leftrightarrow c=2$，由一条准线方程为 $x=-4$ 可得该椭圆的焦点在 x 轴上县 $\frac{a^2}{c}=4\Leftrightarrow a^2=4c=8$，所以 $b^2=a^2-c^2=8-4=4$。故选答案 C

31.(2012.II.8) 已知 F_1,F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=2$ 的左右焦点，点 P 在 C 上，$|PF_1|=2|PF_2|$，则 $\cos\angle F_1PF_2=$　　　　(　　)

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{5}$

分析：C

【命题意图】本试题主要考查了双曲线的定义的运用和性质的运用，以及余弦定理的运用。首先运用定义得到两个焦半径的值，然后结合三角形中的余弦定理求解即可。

【解析】解：由题意可知，$a=\sqrt{2}=b,\therefore c=2$，设 $|PF_1|=2x,|PF_2|=x$，则 $|PF_1|-|PF_2|=x=2a=2\sqrt{2}$，故 $|PF_1|=4\sqrt{2},|PF_2|=2\sqrt{2}$，$F_1F_2=4$，利用余弦定理可得

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{PF_1^2+PF_2^2-F_1F_2^2}{2PF_1\cdot PF_2}=\frac{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-4^2}{2\times2\sqrt{2}\times4\sqrt{2}}=\frac{3}{4}。$$

32.(2012.II.21) 已知抛物线 $C:y=(x+1)^2$ 与圆 $M:(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=r^2(r>0)$ 有一个公共点 A，且在 A 处两曲线的切线为同一直线 l。

（1）求 r；

（2）设 m、n 是异于 l 且与 C 及 M 都相切的两条直线，m、n 的交点为 D，求 D 到 l 的距离。

分析：【命题意图】本试题考查了抛物线与圆的方程，以及两个曲线的公共点处的切线的运用，并在此基础上求解点到直线的距离。

解：（1）设 $A(x_0,(x_0+1)^2)$，对 $y=x=(x+1)^2$ 求导得 $y'=2(x+1)$，故直线 l 的斜率 $k=2(x_0+1)$，当 $x_0=1$ 时，不合题意，所心 $x_0\neq1$。圆心为 $M(1,\frac{1}{2})$，MA 的斜率 $k'=\frac{(x_0+1)^2-\frac{1}{2}}{x_0-1}$

由 $l \perp MA$ 知 $kk' = -1$，即 $2(x_0+1) \times \dfrac{(x_0+1)^2 - \frac{1}{2}}{x_0 - 1} = -1$，解得 $x_0 = 0$，故 $A(0,1)$

所以 $r = |MA| = \sqrt{(1-0)^2 + (\frac{1}{2}-1)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

（2）设 $(a,(a+1)^2)$ 为 C 上一点，则在该点处的切线方程为 $y-(a+1)^2 = 2(a+1)(x-a)$ 即

$y = 2(a+1)x - a^2 + 1$，若该直线与圆 M 相切，则圆心 M 到该切线的距离为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，即

$\dfrac{|2(a+1)\times 1 - \frac{1}{2} - a^2 + 1|}{\sqrt{[2(a+1)]^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，化简可得 $a^2(a^2 - 4a - 6) = 0$

求解可得 $a_0 = 0, a_1 = 2+\sqrt{10}, a_2 = 2-\sqrt{10}$

抛物线 C 在点 $(a_i,(a_i+1)^2)(i=0,1,2)$ 处的切线分别为 l,m,n，其方程分别为

$y = 2x+1$① $y = 2(a_1+1)x - a_1{}^2 + 1$② $y = 2(a_2+1)x - a_2{}^2 + 1$③

②—③得 $x = \dfrac{a_1+a_2}{2} = 2$，将 $x=2$ 代入②得 $y=-1$，故 $D(2,-1)$

所以 D 到直线 l 的距离为 $d = \dfrac{|2\times 2 - (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$。

【点评】该试题出题的角度不同于平常，因为涉及的是两个二次曲线的交点问题，并且要研究两曲线在公共点出的切线，把解析几何和导数的工具性结合起来，是该试题的创新处。另外对于在第二问中更是难度加大了，出现了另外的两条公共的切线，这样的问题对于我们以后的学习也是一个需要练习的方向。

33.(2013.I.4) 已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$（$a>0, b>0$）的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，则 C 的渐近线方程为 ( )

A. $y = \pm\frac{1}{4}x$ B. $y = \pm\frac{1}{3}x$ C. $y = \pm\frac{1}{2}x$ D. $y = \pm x$

分析：C.

34.(2013.I.10) 已知椭圆 $E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$，过点 F 的直线交椭圆于 A,B 两点。若 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$，则 E 的方程为 ( )

A. $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$　　B. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$　　C. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$　　D. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

分析：D.

35.(2013.II.11) 设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，点M在C上，$|MF|=5$，若以MF为直径的圆过点$(0,2)$，则C的方程为　　(　　)

A. $y^2=4x$或$y^2=8x$　　B. $y^2=2x$或$y^2=8x$

C. $y^2=4x$或$y^2=16x$　　D. $y^2=2x$或$y^2=16x$

分析：C.

36.(2013.II.20) 平面直角坐标系xOy中，过椭圆$M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点$F$作直$x+y-\sqrt{3}=0$交$M$于$A,B$两点，$P$为$AB$的中点，且$OP$的斜率为$\frac{1}{2}$.

(I) 求M的方程；

(II) C,D为M上的两点，若四边形$ABCD$的对角线$CD\perp AB$，求四边形$ABCD$面积的最大值.

分析：

（Ⅰ）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，则

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1，\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1，\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1，$$

由此可得 $\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}=-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$.

因为 $x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，$\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}$，

所以 $a^2=2b^2$.

又由题意知，M的右焦点为$(\sqrt{3},0)$，故$a^2-b^2=3$.

因此 $a^2=6$，$b^2=3$.

所以M的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）由$\begin{cases}x+y-\sqrt{3}=0,\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\frac{4\sqrt{3}}{3},\\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\ y=\sqrt{3}.\end{cases}$

因此$|AB|=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

由题意可设直线CD的方程为$y=x+n$ $(-\frac{5\sqrt{3}}{3}<n<\sqrt{3})$，设$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$.

由$\begin{cases}y=x+n,\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $3x^2+4nx+2n^2-6=0$.

于是 $x_{3,4}=\frac{-2n\pm\sqrt{2(9-n^2)}}{3}$.

因为直线CD的斜率为1，所以 $|CD|=\sqrt{2}|x_4-x_3|=\frac{4}{3}\sqrt{9-n^2}$.

由已知，四边形$ACBD$的面积 $S=\frac{1}{2}|CD|\cdot|AB|=\frac{8\sqrt{6}}{9}\sqrt{9-n^2}$.

当 $n=0$ 时，S 取得最大值，最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

所以四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

37.(2014.I.4) 已知 F 是双曲线 C： $x^2-my^2=3m(m>0)$ 的一个焦点，则点 F 到 C 的一条渐近线的距离为 (　　)

$A.\sqrt{3}$　　　　$B.3$　　　　$C.\sqrt{3}m$　　　　$D.3m$

分析：A.

38.(2014.I.10) 已知抛物线 C： $y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l， P 是 l 上一点， Q 是直线 PF 与 C 的一个焦点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则 $|QF|=$ (　　)

$A.\frac{7}{2}$　　　　$B.\frac{5}{2}$　　　　$C.3$　　　　$D.2$

分析：C.

39.(2014.I.20) 已知点 A（0，-2），椭圆 E： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$， F 是椭圆的焦点，直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$， O 为坐标原点.

（Ⅰ）求 E 的方程;

（Ⅱ）设过点 A 的直线 l 与 E 相交于 P,Q 两点，当 ΔOPQ 的面积最大时，求 l 的方程.

分析：

(I) 设$F(c,0)$，由条件知，$\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，得$c=\sqrt{3}$.　　　　…5 分

又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以a=2, $b^2=a^2-c^2=1$.故E的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(II) 当$l\perp x$轴时不合题意，故设$l: y=kx-2, P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$.

将$y=kx-2$代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$得$(1+4k^2)x^2-16kx+12=0$.

当$\Delta=16(4k^2-3)>0$,即$k^2>\frac{3}{4}$时，$x_{1,2}=\frac{8k\pm2\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$.

从而$|PQ|=\sqrt{k^2+1}|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$.

又点O到直线PQ的距离$d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$.所以ΔOPQ的面积

$S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{2}d\cdot|PQ|=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$.　　　　……9 分

设$\sqrt{4k^2-3}=t$, 则$t>0, S_{\Delta OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}$.

因为$t+\frac{4}{t}\geq 4$, 当且仅当$t=2$，即$k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$时等号成立，且满足$\Delta>0$.　　　　…12 分

所以，当ΔOPQ的面积最大时，l的方程为$y=\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$或$y=-\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$

40.(2014.II.10) 设 F 为抛物线 C: $y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 30°的直线交 C 于 A,B 两点，O 为坐标原点，则△ OAB 的面积为　　(　　)

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$　　C. $\frac{63}{32}$　　D. $\frac{9}{4}$

分析：D.

41.(2014.II.20) 设 F_1, F_2 分别是椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左,右焦点，M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直，直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N.

（Ⅰ）若直线 MN 的斜率为$\frac{3}{4}$，求 C 的离心率;

（Ⅱ）若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2，且$|MN|=5|F_1N|$，求 a,b.

分析：（I）根据 $c=\sqrt{a^2-b^2}$ 及题设知 $M(c,\frac{b^2}{a}), 2b^2=3ac$

将 $b^2=a^2-c^2$ 代入 $2b^2=3ac$，解得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}, \frac{c}{a}=-2$（舍去）故 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）由题意，原点 O 为 F_1F_2 的中点，$MF_2 // y$ 轴，所以直线 MF_1 与 y 轴的交点 $D(0,2)$ 是线段 MF_1 的中点，故 $\frac{b^2}{a}=4$，即 $b^2=4a$　　①

由$|MN|=5|F_1N|$得$|DF_1|=2|F_1N|$。设 $N(x_1,y_1)$，由题意知 $y_1\prec 0$，则

$\begin{cases}2(-c-x_1)=c\\-2y_1=2\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=-\frac{3}{2}c,\\y_1=-1\end{cases}$ 代入 C 的方程，得 $\frac{9c^2}{4a^2}+\frac{1}{b^2}=1$。

将①及 $c=\sqrt{a^2-b^2}$ 代入②得 $\frac{9(a^2-4a)}{4a^2}+\frac{1}{4a}=1$，解得 $a=7, b^2=4a=28$，故 $a=7, b=2\sqrt{7}$.

42.(2015.I.5) 已知 M（x_0, y_0）是双曲线 C：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$上的一点，F_1, F_2是 C 上的两个焦点，若$\overrightarrow{MF_1}\bullet\overrightarrow{MF_2}<0$，则 y_0 的取值范围是 (　　)

A. （$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$）　B. （$-\frac{\sqrt{3}}{6}$，$\frac{\sqrt{3}}{6}$）　C. （$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\frac{2\sqrt{2}}{3}$）　D. （$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$）

【答案】A

【解析】由题知 $F_1(-\sqrt{3},0), F_2(\sqrt{3},0)$，$\frac{x_0^2}{2}-y_0^2=1$，所以$\overrightarrow{MF_1}\bullet\overrightarrow{MF_2}=$

$(-\sqrt{3}-x_0,-y_0)\bullet(\sqrt{3}-x_0,-y_0)$ $=x_0^2+y_0^2-3=3y_0^2-1<0$，解得$-\frac{\sqrt{3}}{3}<y_0<\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选 A.

【考点定位】双曲线的标准方程；向量数量积坐标表示；一元二次不等式解法.

【名师点睛】本题考查利用向量数量积的坐标形式将$\overrightarrow{MF_1}\bullet\overrightarrow{MF_2}$表示为关于点 M 坐标的函数，利用点 M 在双曲线上，消去 x_0，根据题意化为关于 y_0 的不等式，即可解出 y_0 的范围，是基础题，将$\overrightarrow{MF_1}\bullet\overrightarrow{MF_2}$表示为 y_0 的函数是解本题的关键.

43.(2015.I.14) 一个圆经过椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$的三个顶点，且圆心在 x 轴的正半轴上，则该圆的标准方程为____________.

【答案】$(x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{25}{4}$

【解析】设圆心为（a，0），则半径为$4-a$，则$(4-a)^2=a^2+2^2$，解得$a=\frac{3}{2}$，故圆的方程为$(x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{25}{4}$.

【考点定位】椭圆的几何性质；圆的标准方程

【名师点睛】本题考查椭圆的性质及圆的标准方程，本题结合椭圆的图形可知圆过椭圆的上下顶点与左顶点（或右顶点），有圆的性质知，圆心在 x 轴上，设出圆心，算出半径，根据垂径定理列出关于圆心的方程，解出圆心坐标，即可写出圆的方程，细心观察圆与椭圆的特征是解题的关键.

44.(2015.I.20) 在直角坐标系 xoy 中，曲线 C：$y=\frac{x^2}{4}$与直线 $y=kx+a$ ($a>0$)交与 M,N 两点，

（Ⅰ）当 k=0 时，分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程；

（Ⅱ）y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有∠OPM=∠OPN？说明理由.

【答案】（Ⅰ）$\sqrt{a}x-y-a=0$或$\sqrt{a}x+y+a=0$（Ⅱ）存在

【解析】

试题分析：（Ⅰ）先求出 M,N 的坐标，再利用导数求出 M,N.（Ⅱ）先作出判定，再利用设而不求思想即将$y=kx+a$代入曲线 C 的方程整理成关于 x 的一元二次方程，设出 M,N 的坐标和 P 点坐标，利用设而不求思想，将直线 PM，PN 的斜率之和用 a 表示出来，利用直线 PM，PN 的斜率为 0,即可求出 a,b 关系，从而找出适合条件的 P 点坐标.

试题解析：（Ⅰ）由题设可得 $M(2\sqrt{a},a)$，$N(-2\sqrt{2},a)$，或 $M(-2\sqrt{2},a)$，$N(2\sqrt{a},a)$.

$\because y'=\frac{1}{2}x$，故 $y=\frac{x^2}{4}$ 在 $x=2\sqrt{2}a$ 处的到数值为 $\sqrt{a}$，C 在 $(2\sqrt{2}a,a)$ 处的切线方程为

$y-a=\sqrt{a}(x-2\sqrt{a})$，即 $\sqrt{a}x-y-a=0$.

故 $y=\frac{x^2}{4}$ 在 x=- $2\sqrt{2}a$ 处的到数值为- $\sqrt{a}$，C 在 $(-2\sqrt{2}a,a)$ 处的切线方程为

$y-a=-\sqrt{a}(x+2\sqrt{a})$，即 $\sqrt{a}x+y+a=0$.

故所求切线方程为 $\sqrt{a}x-y-a=0$ 或 $\sqrt{a}x+y+a=0$. ……5 分

（Ⅱ）存在符合题意的点，证明如下：

设 P（0，b）为复合题意得点，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 PM，PN 的斜率分别为 k_1,k_2.

将 $y=kx+a$ 代入 C 得方程整理得 $x^2-4kx-4a=0$.

$\therefore x_1+x_2=4k, x_1x_2=-4a$.

$\therefore k_1+k_2=\frac{y_1-b}{x_1}+\frac{y_2-b}{x_2}=\frac{2kx_1x_2+(a-b)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{k(a+b)}{a}$.

当 $b=-a$ 时，有 k_1+k_2=0，则直线 PM 的倾斜角与直线 PN 的倾斜角互补，

故∠OPM=∠OPN，所以 $P(0,-a)$ 符合题意. ……12 分

【考点定位】抛物线的切线；直线与抛物线位置关系；探索新问题；运算求解能力

【名师点睛】对直线与圆锥曲线的位置关系问题，常用设而不求思想，即设出直线方程代入圆锥曲线方程化为关于 x 的一元二次方程，设出交点坐标，利用根与系数关系，将交点的横坐标之和与积一元二次方程的系数表示出来，然后根据题中的条件和所求结论，选择合适的方法进行计算，注意题中条件的合理转化，如本题中，将角∠OPM=∠OPN 相同转化为直线 PM 的倾斜角与直线 PN 的倾斜角互补，进而转化为直线 PM 的斜率与直线 PN 的斜率之和为 0，再将其坐标化，即可列出方程，解析几何题思路固定，字母运算复杂，需要细心和耐心.

45.(2015.II.11) 已知 A，B 为双曲线 E 的左，右顶点，点 M 在 E 上，ΔABM 为等腰三角形，且顶角为 120°，则 E 的离心率为 (　　)

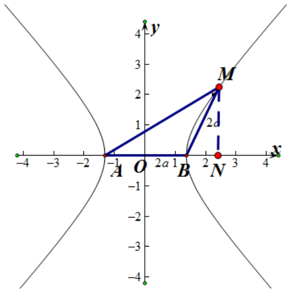
A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，如图所示，$|AB|=|BM|$，$\angle ABM=120^0$，过点 M 作 $MN\perp x$ 轴，垂足为 N，在 $Rt\Delta BMN$ 中，$|BN|=a$，$|MN|=\sqrt{3}a$，故点 M 的坐标为 $M(2a,\sqrt{3}a)$，代入双曲线方程得 $a^2=b^2=a^2-c^2$，即 $c^2=2a^2$，所以 $e=\sqrt{2}$，故选 D.

【考点定位】双曲线的标准方程和简单几何性质.

【名师点睛】本题考查双曲线的标准方程和简单几何性质、解直角三角形知识，正确表示点 M 的坐标，利用“点在双曲线上”列方程是解题关键，属于中档题.



46.(2015.II.20) 已知椭圆 $C: 9x^2+y^2=m^2(m>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A，B，线段 AB 的中点为 M.

(Ⅰ)证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

(Ⅱ)若 l 过点 $(\frac{m}{3},m)$，延长线段 OM 与 C 交于点 P，四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形？若能，求此时 l 的斜率，若不能，说明理由.

【答案】(Ⅰ)详见解析；（Ⅱ）能，$4-\sqrt{7}$ 或 $4+\sqrt{7}$.

【解析】(Ⅰ)设直线 $l: y=kx+b\ (k\neq 0, b\neq 0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_M,y_M)$.

将 $y=kx+b$ 代入 $9x^2+y^2=m^2$ 得 $(k^2+9)x^2+2kbx+b^2-m^2=0$，故 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{kb}{k^2+9}$，

$y_M=kx_M+b=\frac{9b}{k^2+9}$. 于是直线 OM 的斜率 $k_{OM}=\frac{y_M}{x_M}=-\frac{9}{k}$，即 $k_{OM}\cdot k=-9$. 所以直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值.

（Ⅱ）四边形 $OAPB$ 能为平行四边形.

因为直线 l 过点 $(\frac{m}{3},m)$，所以 l 不过原点且与 C 有两个交点的充要条件是 $k>0$，$k\neq 3$.

由(Ⅰ)得 OM 的方程为 $y=-\frac{9}{k}x$. 设点 P 的横坐标为 x_P. 由 $\begin{cases} y=-\frac{9}{k}x, \\ 9x^2+y^2=m^2, \end{cases}$ 得 $x_P^2=\frac{k^2m^2}{9k^2+81}$，即

$x_P=\frac{\pm km}{3\sqrt{k^2+9}}$. 将点 $(\frac{m}{3},m)$ 的坐标代入直线 l 的方程得 $b=\frac{m(3-k)}{3}$，因此 $x_M=\frac{mk(k-3)}{3(k^2+9)}$. 四边形

$OAPB$ 为平行四边形当且仅当线段 AB 与线段 OP 互相平分，即 $x_P=2x_M$. 于是 $\frac{\pm km}{3\sqrt{k^2+9}}=$

$2\times\frac{mk(k-3)}{3(k^2+9)}$. 解得 $k_1=4-\sqrt{7}$，$k_2=4+\sqrt{7}$. 因为 $k_i>0, k_i\neq 3$，$i=1$，2，所以当 l 的斜率为

$4-\sqrt{7}$ 或 $4+\sqrt{7}$ 时，四边形 $OAPB$ 为平行四边形.

【考点定位】1、弦的中点问题；2、直线和椭圆的位置关系.

【名师点睛】(Ⅰ)题中涉及弦的中点坐标问题，故可以采取“点差法”或“韦达定理”两种方法求解：设端点 A,B 的坐标，代入椭圆方程并作差，出现弦 AB 的中点和直线 l 的斜率；设直线 l 的方程同时和椭圆方程联立，利用韦达定理求弦 AB 的中点，并寻找两条直线斜率关系；（Ⅱ）根据(Ⅰ)中结论，设直线 OM 方程并与椭圆方程联立，求得 M 坐标，利用 $x_P=2x_M$ 以及直线 l 过点 $(\frac{m}{3},m)$ 列方程求 k 的值.