2016年湖南省中学数学教师解题比赛
高中组初赛试卷

(考试时间：2016年10月15日9：00~11：00)

说明：

1、请用蓝色、黑色或蓝黑色钢笔或签字笔作答;

2、答案请写在本试卷相应位置，试卷范围以外作答无效。

一、选择题(每小题5分，共40分)

1、已知集合M＝{1，2，3，…，2016}，若集合A＝{$x|x\subseteq M$}，则集合A的元素个数为

A.2016　　B.2^{2016}　　C.2015　　D.2^{2015}

解：∵M中共有2016个元素，∴集合M共有2^{2016}个子集，故A中元素共有2^{2016}个，选B。

2、已知$x\in R$，$y\in R$，则“$|x|<1$且$|y|<1$”是“$|x+y|+|x-y|<2$”的

A.充分而非必要条件　　B.必要而非充分条件　　C.充分必要条件　　D.既非充分也非必要条件

解：作出可行域，即知应当选C。

3、从1，2，3，4，5，6中选出不同的三个数，分别替换直线方程$ax+by+c=0$中的a，b，c，使该直线与圆$x^2+y^2=1$相离，这样的直线有

A.17条　　B.18条　　C.34条　　D.36条

解：直线$ax+by+c=0$与圆$x^2+y^2=1$相离$\Leftrightarrow a^2+b^2<c^2$。而$C_6^3=20$，其中(1，2，3)与(2，4，6)对应的直线重合，此外还有(3，4，5)与(4，5，6)不符合条件，所以符合条件的(a，b，c)只有17组，再考虑到a，b的取值可以交换，因此共有34条直线，选C。

4、函数$f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x^2),-1<x<0\\ e^{x-1},x\geq 0\end{cases}$满足$f(1)+f(a)=2$，则$a$的所有可能值为

A.1或$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C.1　　D.1或$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解：∵$f(1)=1$，∴由$f(1)+f(a)=2$知$f(a)=1$，

当$a\geqslant 0$时，$e^{a-1}=1\Rightarrow a=1$；当$-1<a<0$时，$\sin(a^2\pi)=1\Rightarrow a^2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。选A。

5、设常数a使得函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x-a$在闭区间[0，2π]上恰有三个零点$x_1$，$x_2$，$x_3$，则$x_1+x_2+x_3=$

A.0　　B.$\dfrac{\pi}{3}$　　C.2π　　D.$\dfrac{7}{3}\pi$

解：∵函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x-a$在闭区间[0，2π]上恰有三个零点$x_1$，$x_2$，$x_3$，

∴$y_1=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$($x\in$[0，2π])的图象与$y=a$的图象恰有三个交点。

画出草图即知$x_1=0$，$x_2=\dfrac{\pi}{3}$，$x_3=2\pi$。选D

6、斐波拉契数列：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，…中的第2016个数被5除的余数是

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

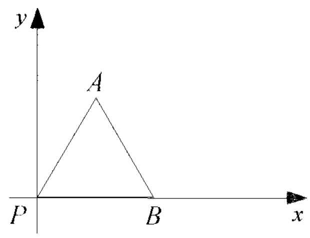
解：∵斐波拉契数列中各项被 5 除的余数依次为：1，1，2，3，0，3，3，1，4，0，4，4，3，2，0，2，2，4，1，0，1，1，2，3，…，其周期为 T＝20，而 2016＝20×100＋16，∴第 2016 个数被 5 除的余数等于第 16 个余数 2。选 B。

7、设 a，b，c 是三个正实数，且 $a(a+b+c)=bc$，则 $\frac{a}{b+c}$ 的最大值为

A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　B. $\sqrt{2}-1$　　C. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$　　D. $\sqrt{2}+1$

解：设 $t=\frac{a}{b+c}$，则 $a=t(b+c)$，代入已知等式 $a(a+b+c)=bc$ 中，有 $t(b+c)[(t+1)(b+c)]=bc$，

于是 $t(t+1)=\frac{bc}{(b+c)^2}\leqslant\frac{1}{4}$，解得 $t\in(0,\frac{\sqrt{2}-1}{2}]$。选 A。



（第 8 题图）

8、如图放置的边长为 1 的正三角形 PAB 沿 x 轴正向流滚动，设顶点 P(x，y)的纵坐标与横坐标的函数关系是 $y=f(x)$，则 $y=f(x)$在其两个相邻零点间的图像与 x 轴所围区域的面积为

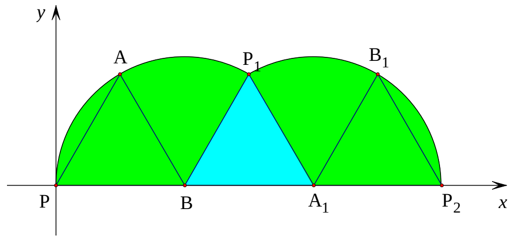
A. $\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

解：画出三角形滚动时动点 P 的轨迹(如右图所示)，

$S_{阴}=\frac{2}{3}\times\pi\cdot1^2+\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$，

选 A。



二、**填空题**(每小题 5 分，共 30 分)

9、已知$\{a_n\}$是正项等比数列，且 $a_1+a_2=\frac{3}{4}$，$a_3+a_4+a_5+a_6=15$，则 $a_7+a_8+a_9=$________。

解：∵ $\frac{3}{4}=a_1+a_2$，$a_3+a_4=(a_1+a_2)q^2$，$a_5+a_6=(a_1+a_2)q^4$，∴ $15=\frac{3}{4}q^2+\frac{3}{4}q^4\Rightarrow q=2$，

再代入 $\frac{3}{4}=a_1+a_2$ 得 $a_1=\frac{1}{4}$，于是 $a_7=2^4$，$a_8=2^5$，$a_9=2^6$，∴$a_7+a_8+a_9=1012$。

10、抛物线 $x^2=2py(p>0)$的焦点为 F，其准线与双曲线 $x^2-y^2=3$ 相交于 A、B 两点，若△ABF 为等边三角形，则 $p=$________。

解：由 $\begin{cases} y=-\frac{p}{2} \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ 得 $x=\pm\frac{\sqrt{12+p^2}}{2}$，而△ABF 为等边三角形，∴ $p=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{12+p^2}\Rightarrow p=6$。

11、甲、乙、丙三人一起玩“剪刀、石头、布”的游戏。规定“石头”赢“剪刀”，“剪刀”赢“布”，“布”赢“石头”。每一局甲、乙、丙三人同时出“剪刀、石头、布”三种手势中的一种手势，且是相互独立的。设在一局中甲赢的人数为ξ，则随机变量ξ的数学期望为________。

解：甲、乙、丙的手势形式共有 27 种。其中甲赢 2 人的手势形式只有(石头，剪刀，剪刀)、(剪刀，布，布)、(布、石头，石头)3 种，其概率为 $\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$；甲赢 1 人的手势形式共有(石头，剪刀，石头)、(石头，剪刀，布)、(剪刀，布，石头)、(剪刀，布，剪刀)、(布、石头，剪刀) 、(布、石头，布)[其中乙与丙的手势还可以互换]等 12 种，其概率为 $\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$。∴$E\xi=1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$。

12、将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图像向右平移φ($0<\varphi<\frac{\pi}{2}$)个单位后得到函数 $g(x)$的图像，若对满足$|f(x_1)-f(x_2)|=2$ 的 x_1，x_2，有$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{3}$，则φ=________。

解：由于$|f(x)|\leqslant 1$，∴为了保证$|f(x_1)-f(x_2)|=2$，必须让 $f(x_1)$与 $f(x_2)$分别取－1 与 1，

而 $f(x)$的周期为 T=π⇒$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，再由$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{3}$，知 $\varphi=\frac{\pi}{6}$。

13、设 x，y>0，$S=\min\{x,y+\frac{1}{x},\frac{1}{y}\}$，则 S 的最大值为________。

解：取 $x=y+\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$ 得 $\begin{cases}xy=1\\x=2y\end{cases}$，∴ $x=\sqrt{2}$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$。因此 $S_{\max}=\sqrt{2}$。

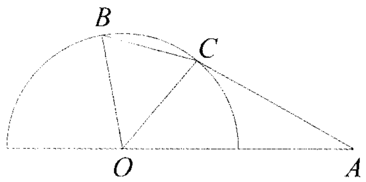
14、设α∈R，若$\{x||\sin x|^{\alpha}+|\cos x|^{\alpha}=1\}\subseteq\{x|\sin^4x+\cos^4x=1\}$，则α的取值范围是________。

解：∵$1=\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-2\sin^2x\cos^2x$，∴$\sin x=0$ 或 $\cos x=0$

因此 $x=\frac{k\pi}{2},k\in Z$，于是 $\begin{cases}|\sin x|=1\\|\cos x|=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|\sin x|=0\\|\cos x|=1\end{cases}$，故α∈R。

三、解答题(每小题 20 分，共 80 分)

15、半径为 1 的半圆上有一动点 B，A 为半径的延长上一点，且 OA=2，∠AOB 的平分线交半圆于点 C。



（第 15 题图）

(1)若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=3$，求 cos∠AOB 的值；

(2)若 A、B、C 三点共线，求线段 AC 的长。

解：(1)以 O 为坐标原点，OA 为 x 轴正向建立直角坐标系，则 A(2，0)，

又 OC 平分∠AOB，且半径为 1，所以可设 C(cosα，sinα)，B(cos2α，sin2α)(其中$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)。

于是由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=3$，

可得 3=(cosα－2，sinα)·(cos2α－2，sin2α)=cosαcos2α－2cosα－2cos2α＋4＋sinαsin2α

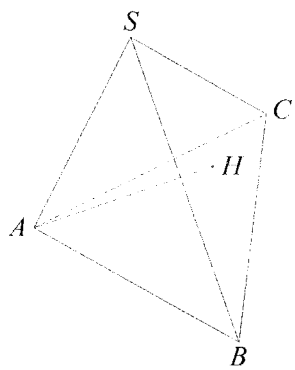
即 2cos2α＋cosα－1=0，解得$\cos\alpha=\frac{3}{4}$或 cosα=－1(舍)，因此，cos∠AOB=cos2α=$\frac{1}{8}$。

(2)∵A、B、C 三点共线，∴(cosα－2，sinα)=λ(cos2α－2，sin2α)，

从而$\frac{\cos 2\alpha-2}{\cos\alpha-2}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha$，于是 $\cos 2\alpha-2=2\cos^2\alpha-4\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{4}$。

因此，由余弦定理得 $AC^2=1+4-2\times1\times2\times\frac{3}{4}=2$，∴ $AC=\sqrt{2}$。

16、如图所示的三棱锥 S－ABC 的底面是正三角形，点 A 在侧面 SBC 上的射影 H 是△SBC 的垂心，已知 SA=$2\sqrt{3}$，二面角 S－AB－C 的大小为 30°。



（第 16 题图）

(1)求证：三棱锥 S－ABC 为正三棱锥；

(2)求三棱锥 S－ABC 的体积。

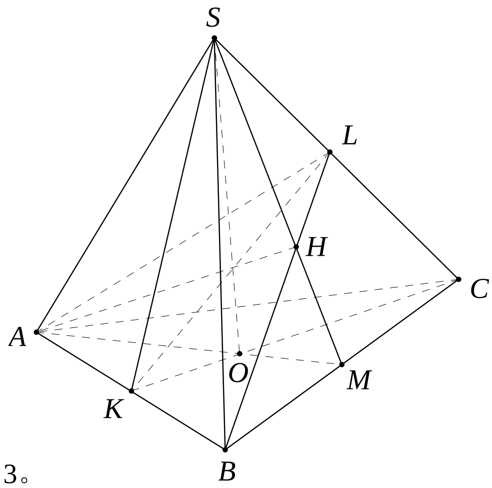
(1)证：∵点 A 在侧面 SBC 上的射影 H 是△SBC 的垂心，

∴AH⊥SC，AH⊥BC，连 BH 并延长交 SC 于 L，有 BL⊥SC，

因此 SC⊥平面 ABL，SC⊥AB，SC⊥LK。

再在正三角形 ABC 中，取 AB 的中点 K，连 CK，有 CK⊥AB，

于是 AB⊥平面 SCK，因而 AB⊥LK，且 AB⊥SK。
故∠LKC＝30°为二面角 S－AB－C 的平面角，∠KCL＝60°。
∴△SAB 为等腰三角形，因而 SA＝SB。
另一方面，取 BC 中点 M，有 AM⊥BC，又 AH⊥BC，∴BC⊥HM。
再根据 H 为△SBC 的垂心，知 SH⊥BC，
于是 S、H、M 三点共线。
∴△SBC 也为等腰三角形，因而 SB＝SC。
故 SA＝SB＝SC，
∴三棱锥 S－ABC 为正三棱锥。



(2)解：由(1)知 AB⊥平面 SCK，
∴平面 SCK⊥平面 ABC，
作 SO⊥CK 于 O，必有 SO⊥面 ABC，
且 O 为△ABC 的中心。
故 SO＝SC·**sin**60°＝3，
$\sqrt{3}$＝SC·**cos**60°＝CO＝$\frac{2}{3}$CK＝$\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$BC＝$\frac{\sqrt{3}}{3}$BC⇒BC＝3。
因此，$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}\times S_{\Delta ABC}\times SO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3=\frac{9\sqrt{3}}{4}$。

17、已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$($a$＞$b$＞0)的焦点为 F_1，F_2，点 C 为椭圆上任意一点，过点 C 作椭圆的切线 l。
(1)证明：l 是$\angle F_1CF_2$的外角平分线；
(2)过点 F_2 作 l 的垂线，垂足为 H，求点 H 的轨迹方程。

(1)证：设 C(x_0，y_0)，则切线 l 的方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，∴$k_l=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$。

又 F_1(－c，0)，F_2(c，0)，∴$k_{F_1C}=\frac{y_0}{x_0+c}$，$k_{F_2C}=\frac{y_0}{x_0-c}$。
再设直线 l 到直线 F_1C 的角为α，直线 F_2C 到直线 l 的角为β，

则$$\tan\alpha=\frac{k_{F_1C}-k_l}{1+k_{F_1C}\cdot k_l}=\frac{\frac{y_0}{x_0+c}+\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1-\frac{y_0}{x_0+c}\cdot\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}=\frac{a^2{y_0}^2+b^2{x_0}^2+b^2cx_0}{a^2x_0y_0+a^2cy_0-b^2x_0y_0}=\frac{a^2b^2+b^2cx_0}{c^2x_0y_0+a^2cy_0}=\frac{b^2}{cy_0}$$

$$\tan\beta=\frac{k_l-k_{F_2C}}{1+k_{F_2C}\cdot k_l}=\frac{-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}-\frac{y_0}{x_0-c}}{1-\frac{y_0}{x_0-c}\cdot\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}=\frac{-a^2{y_0}^2-b^2{x_0}^2+b^2cx_0}{a^2x_0y_0-a^2cy_0-b^2x_0y_0}=\frac{-a^2b^2+b^2cx_0}{c^2x_0y_0-a^2cy_0}=\frac{b^2}{cy_0}$$
因此，α＝β，即 l 是$\angle F_1CF_2$的外角平分线。

(2)解：过点 F_2 作 $F_2H\perp l$ 于 H，并延长交直线 F_1C 于 T，
由(1)已证 l 是$\angle F_1CF_2$的外角平分线，∴H 是 F_2T 的中点，且 CF_2＝CT。
而 O 是 F_1F_2 的中点，∴OH 是$\triangle F_2F_1T$的中位线，于是 OH＝$\frac{1}{2}F_1T$＝$\frac{1}{2}$(FC＋CT)＝a，
故点 H 的轨迹方程为 $x^2+y^2=a^2$。

18、设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x-1}$ $(a\in R)$。

(1)试求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$，$b\in(0，1)$，$c\in(1，+\infty)$，求证：$f(c)-f(b)\geqslant\dfrac{3}{2}$。

解：(1)∵ $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-(2+a)x+1}{x(x-1)^2}$

其中△$=(2+a)^2-4=a^2+4a=0\Rightarrow a=-4$，或 $a=0$。

当$-4\leqslant a\leqslant 0$ 时，△$\leqslant 0$，$x^2-(2+a)x+1\geqslant 0$ 恒成立，

∴$f'(x)\geqslant 0$ 对 $0<x\neq 1$ 恒成立，

∴$f(x)$在$(0，1)$上为增函数，在$(1，+\infty)$上也是增函数；

当 $a>0$ 时，△>0，由 $x^2-(2+a)x+1=0$ 可得 $x=\dfrac{2+a\pm\sqrt{a^2+4a}}{2}$，

并且$0<\dfrac{2+a-\sqrt{a^2+4a}}{2}<1<\dfrac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2}$，

∴ $x\in(0,\dfrac{2+a-\sqrt{a^2+4a}}{2})$ 时，$x^2-(2+a)x+1>0$，$f(x)$为增函数，

$x\in(\dfrac{2+a-\sqrt{a^2+4a}}{2},1)$ 时，$x^2-(2+a)x+1<0$，$f(x)$为减函数，

$x\in(1,\dfrac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2})$ 时，$x^2-(2+a)x+1<0$，$f(x)$为减函数，

$x\in(\dfrac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2},+\infty)$ 时，$x^2-(2+a)x+1>0$，$f(x)$为增函数；

当 $a<-4$ 时，△>0，方程 $x^2-(2+a)x+1=0$ 有两根 $x=\dfrac{2+a\pm\sqrt{a^2+4a}}{2}$，

并且$\dfrac{2+a-\sqrt{a^2+4a}}{2}<\dfrac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2}<0$，

∴$x\in(0，1)$时，$x^2-(2+a)x+1>0$，$f(x)$为增函数，

$x\in(1，+\infty)$时，$x^2-(2+a)x+1>0$，$f(x)$为增函数。

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$的递增区间为$(0，1)$，$(1，+\infty)$；

当 $a>0$ 时，$f(x)$的递增区间为 $(0,\dfrac{2+a-\sqrt{a^2+4a}}{2})$，$(\dfrac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2},+\infty)$，递减区间为 $(\dfrac{2+a-\sqrt{a^2+4a}}{2},1)$，$(1,\dfrac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2})$。

(2) ∵ $a \geqslant \frac{1}{2}$， ∴ $f(x)$ 在 $(0,\frac{2+a-\sqrt{a^2+4a}}{2})$ 上递增，在 $(\frac{2+a-\sqrt{a^2+4a}}{2},1)$ 上递减，在 $(1,\frac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2})$ 上递减，在 $(\frac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2},+\infty)$ 上递增。

因此 $f(x)$在(0，1)上有极大值 $f(\frac{2+a-\sqrt{a^2+4a}}{2})$，在(1，＋∞)上有极小值 $f(\frac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2})$。

即 $f(b)\leqslant f(\frac{2+a-\sqrt{a^2+4a}}{2})$，$f(c)\geqslant f(\frac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2})$。

因此，$f(c)-f(b)\geqslant f(\frac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2})-f(\frac{2+a-\sqrt{a^2+4a}}{2})$

$=\ln\frac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2+a-\sqrt{a^2+4a}}+\frac{2a}{a+\sqrt{a^2+4a}}-\frac{2a}{a-\sqrt{a^2+4a}}$

$=2\ln\frac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2}+\sqrt{a^2+4a}$

由于 $a\geqslant\frac{1}{2}$，∴ $\sqrt{a^2+4a}\geq\frac{3}{2}$， $2\ln\frac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2}\geq\ln 4$，

故 $f(c)-f(b)>\frac{3}{2}$。

评注：这里该不会是根据 $a\geqslant 0$ 得 $2\ln\frac{2+a+\sqrt{a^2+4a}}{2}\geq 2\ln 1=0$，从而得到 $f(c)-f(b)\geqslant\frac{3}{2}$ 的吧。

(许毓华 2016 年 10 月 17 日于新宁一中)