2016 年湖南省中学数学教师解题比赛

高中组决赛答案

（考试时间：2016 年 11 月 20 日 9:00-11:30）

说明：

1. 请用蓝色、黑色或蓝黑色钢笔或签字笔作答；

2. 答案请写在本试卷相应位置，试卷范围以外作答无效.

题　号	一	二						总　分
		11	12	13	14	15	16	
记　分								
评卷人								
复核人								

一、填空题（请把唯一正确的答案写在题中的横线上. 每小题 6 分，共 60 分.）

1. 设 $f_k(x)=\dfrac{1}{k}(\sin^k x+\cos^k x)$，$k\in Z$，则 $f_4(x)-f_6(x)=$__________.

解：填：$\dfrac{1}{12}$

提示：$f_4(x)=\dfrac{1}{4}(\sin^4 x+\cos^4 x)=\dfrac{1}{4}[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]$

$$=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sin^2 2x,$$

$$f_6(x)=\frac{1}{6}(\sin^6 x+\cos^6 x)=\frac{1}{6}[(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)]$$

$$=\frac{1}{6}(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x)=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\sin^2 2x.$$

所以 $f_4(x)-f_6(x)=\dfrac{1}{12}$.

2. 设 $f(x)=x^2-21x+20+|x^2-21x+20|$ ，求 $f(1)+f(2)+L+f(21)$ 的值_______.

解：填：40

提示：设 $g(x)=x^2-21x+20=(x-1)(x-20)$ ，故有 $1\le x\le 20$ 时，$g(x)\le 0$ ，于是当 $1\le x\le 20$ 时，

$f(x)=g(x)-g(x)=0$ ，$f(1)+f(2)+L+f(21)=f(21)=40$.

3．设 $S=1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\text{L}+\frac{1}{\sqrt{(2n+1)^2}}$，则 $[S]=$________．（$[S]$ 表示不超过 S 的最大整数）

解：填：$2n$

提示：由 $\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k+2}-\sqrt{k}$，$\frac{1}{\sqrt{k+2}}<\sqrt{k+2}-\sqrt{k}$（$k=1,2,\cdots,n$）放缩，得 $2n<S<2n+1$．故 $[S]=2n$．

4. 点 F 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点，过点 F 的直线 l 与椭圆交于点 A、B 两点，且有 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{FB}$，则直线 l 的斜率是________.

解：填：$\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

提示：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

又 $F(1,0)$，$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{FB}$，则 $(x_2-x_1,y_2-y_1)=3(x_2-1,y_2)$，即

$x_1=3-2x_2$，$y_1=-2y_2$．

而 $\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$ 及 $\frac{(3-2x_2)^2}{4}+\frac{(-2y_2)^2}{3}=1$，解得 $x_2=\frac{7}{4}$，$y_2=\pm\frac{3\sqrt{5}}{8}$.

所以直线 l 的斜率是 $\frac{\pm\frac{3\sqrt{5}}{8}}{\frac{7}{4}-1}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. 已知 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\}$，$B=\left\{(x,y)\middle|\left|x^2-\frac{y^2}{2}\right|\le 1\right\}$ 若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是__________.

解：填：$a\in[-1,1]$

提示：当 $a=0$ 时，显然满足题意.

当 $a\neq 0$ 时，$b^2+c^2\le a^2$ 对应的区域是以 O 点为圆心，$|a|$ 为半径的圆及其内部．$\left|b^2-\frac{c^2}{2}\right|\le 1$ 对应的区域是两双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=\pm 1$ 及其外部的公共部分．这时，$|a|\le 1$，且 $a\neq 0$．

综合上述，$a\in[-1,1]$.

6. 设 $a,b\in\mathrm{R},a<b\le a+2$ ，若函数 $f(x)$ 满足：$x\in(a,b)$ 时，$f(x)>0$ ，$x\notin(a,b)$ 时，$f(x)=0$.

构造函数：$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f_1(2x-1)+f_1(2x+1)$, $f_k(x)=f_{k-1}(2x-1)+f_{k-1}(2x+1),k=3,4,\cdots$.

求满足 $f_n(x)>0(n\ge1)$ 时 x 的集合为____________.

解：填 $\frac{a+1}{2^n}-1<x<\frac{b-1}{2^n}+1$.

提示：由题设，知 $f_2(x)=f_1(2x-1)+f_1(2x+1)>0$ 当且仅当

$a<2x-1<b,a<2x+1<b$ 时成立 ，由于 $a<b\le a+2$，解前述不等式得到 $\frac{a-1}{2}<x<\frac{b+1}{2}$ ，记 $a_1=\frac{a-1}{2},b_1=\frac{b+1}{2}$ ，则 $f_2(x)>0$ 的区间为 (a_1,b_1) ，一直递推下去知 $f_n(x)>0$ 的区间 (a_n,b_n) 满足下面的递推关系：

$a_0=a,a_n=a_{n-1}-\frac{a+1}{2^n},b_0=b,b_n=b_{n-1}+\frac{1-a}{2^n};n=1,2,3,\mathrm{L}$ ；

解得 $a_n=\frac{a+1}{2^n}-1,b_n=1+\frac{b-1}{2^n}(n=0,1,2,\mathrm{L})$，满足题设条件的集合为 $\frac{a+1}{2^n}-1<x<\frac{b-1}{2^n}+1$.

7. 设 $a,b\in\mathrm{R},a<b$ 函数 $g(x)=\max\limits_{a\le t\le b}|x+t|(x\in\mathrm{R})$，则 $g(x)$ 的最小值为：$\underline{\frac{b-a}{2}}$

解：填：$\frac{b-a}{2}$

解析：对于每一个 $x\in R$ ，函数 $f(t)=x+t$ 是线性函数，因此，在任意有限区间上函数 $|f(t)|$ 的最大值与最小值均在区间端点处达到，从而有

$$g(x)=\max_{a\le t\le b}|x+t|=\max_{a,b}\{|x+a|,|x+b|\}$$

由于函数 $y=|x+a|,y=|x+b|$ 的交点横坐标 c 满足 $-(c+b)=c+a\Rightarrow c=-\frac{a+b}{2}$ ，得到

$g(x)=\begin{cases}|x+a|,x\le c,\\|x+b|,x>c\end{cases}$ ，且

$\min\limits_{x}g(x)=g(c)=\frac{b-a}{2}$.

另解：首先设 $[a,b]=[-1,1]$ ，$F(t)=x+t$ ，则 $F(1)-F(-1)=2$ ，因此，

$2\max\limits_{-1\le t\le1}|x+t|\ge|F(1)|+|F(-1)|\ge|F(1)-F(-1)|=2$ ，故 $\max\limits_{-1\le t\le1}|x+t|\ge1$ ，另一方面，取 $x=0$ ，则 $\max\limits_{-1\le t\le1}|t|=1$ ，这表明此时有 $\min\limits_{x}\max\limits_{-1\le t\le1}|x+t|=1$ ，当 $[a,b]\ne[-1,1]$ 时，构造变换 $t=\frac{b-a}{2}u+\frac{a+b}{2},\Rightarrow u\in[-1,1]$ ，以及

$\max\limits_{a\le t\le b}|t+x|=\dfrac{b-a}{2}\max\limits_{-1\le u\le 1}|u+(\dfrac{2x+a+b}{b-a})|$ ，由上面的讨论，知 $g(x)=\max\limits_{a\le t\le b}|x+t|(x\in\mathrm{R})$ 的最小值为 $\dfrac{b-a}{2}$ ，此时有 $\dfrac{2x+a+b}{b-a}=0$ ，即 $x=-\dfrac{a+b}{2}$.

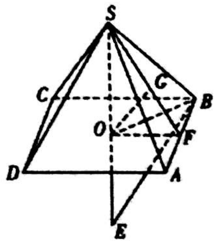
8．体积为 $\frac{16}{3}$ 的正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面中心为 O，SO 与侧面成的角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，那么过 $S-ABCD$ 的各顶点的球的体积为____________.

解：填 A.

解析:(1)如图所示,取 AB 的中点为 F,连接 SF,过点 O 作 $OG\perp SF$,则 $\angle OSG$ 为 SO 与侧面所成的角,且 $\tan\angle OSG=\frac{OF}{SO}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

设 $AB=2a$,则 $SO=\sqrt{2}a$,

所以 $\frac{1}{3}\times 4a^2\times\sqrt{2}a=\frac{16}{3}$，得 $a=\sqrt{2}$，延长 SO 交外接球于 E，则 $EB\perp SB$，由 $OB^2=SO\cdot OE$ 得 4=2•(2R-2),R=2,V=$\frac{4\pi}{3}\times 2^3=\frac{32\pi}{3}$,故选 A.



9·设集合 $A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)|x_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,3,4,5\}$,那么集合 A 中满足条件“$1\le|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|\le 3$”的元素个数为________________.

解:填130.

提示:因为 x_i 的取值只有三种情况:-1,0,1,故 $|x_i|=\begin{cases}0,x_i=0,\\1,x_i=1或-1.\end{cases}$

记 $m=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|$,则由题意可知 $1\le m\le 3$．当 $m=1$ 时,只有一个 $|x_i|=1$,其余的值都取0,故不同的有序数对 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) 共有 $C_5^1C_2^1=10$ 个;当 $m=2$ 时,有两个 $|x_i|=1$,其余的值都取0,故不同的有序数对 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) 共有 $C_5^2C_2^1C_2^1=40$ 个;当 $m=3$ 时,有三个 $|x_i|=1$,其余的值都取0,故不同的有序数对 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) 共有 $C_5^3C_2^1C_2^1C_2^1=80$ 个．综上所述,不同的有序数对共有 $10+40+80=130$ 个．)

10．已知 $f(x)=|x\cdot e^x|$，又 $g(x)=f^2(x)+tf(x)(t\in R)$，若满足 $g(x)=-1$ 的 x 有四个，则 t 的取值范围为________.

解:填 $\left(-\infty,-\dfrac{e^2+1}{e}\right)$.

提示：$f(x)=|xe^x|=\begin{cases}xe^x(x\ge 0)\\-xe^x(x<0)\end{cases}$，当 $x\ge 0$ 时，$f'(x)=e^x+xe^x\ge 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数；当 $x<0$ 时，$f'(x)=-e^x-xe^x=-e^x(x+1)$，由 $f'(x)=0$，得 $x=-1$，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)=-e^x(x+1)>0$，$f(x)$ 为增函数，当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)=-e^x(x+1)<0$，$f(x)$ 为减函数，所以函数 $f(x)=|xe^x|$ 在 $(-\infty,0)$ 上有一个最大值为 $f(-1)=-(-1)e^{-1}=\dfrac{1}{e}$，要使方程 $g(x)=-1$，即 $f^2(x)+tf(x)+1=0(t\in R)$ 有四个实数根，令 $f(x)=m$，则方程 $m^2+tm+1=0$ 应有两个不等根，且一个根在 $(0,\dfrac{1}{e})$ 内，一个根在 $(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 内，再令 $\varphi(m)=m^2+tm+1$，因为 $\varphi(0)=1>0$，则只需 $\varphi(\dfrac{1}{e})<0$，即 $(\dfrac{1}{e})2+\dfrac{1}{e}t+1<0$，解得：$t<-\dfrac{e^2+1}{e}$；所以，使得函数 $f(x)=|x\cdot e^x|$，方程 $g(x)=-1$ 有四个实数根的 t 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{e^2+1}{e}\right)$.

二、解答题（请将详细解答步骤写在题后空白处. 每小题 15 分，共 90 分.）

11．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=\dfrac{4\cdot(\frac{2}{3})^{n-1}}{a_n}, n\in\mathbf{N}^*$，是否存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使 $b_n\geqslant 9$ 成立？请说明理由.

简解：（Ⅰ）易知数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 是首项为1，公差为2的等差数列，所以 $\dfrac{1}{a_n}=2n-1$，故 $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$.

（Ⅱ）因为 $b_{n+1}-b_n=4\cdot(\dfrac{2}{3})^{n-1}\cdot(\dfrac{5-2n}{3})$，所以当 $n\leqslant 2$ 时，$b_n<b_{n+1}$；当 $n\geqslant 3$ 时，$b_n>b_{n+1}$.

即 $b_1<b_2<b_3, b_3>b_4>b_5>\cdots$，数列呈现先增后减，于是 b_3 是数列的最大项．而 $b_3=\dfrac{80}{9}<9$，故不存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使 $b_n\geqslant 9$ 成立.

12．在一次有多位成员参加的会议中要对某一方案进行投票，每个人投票支持该方案的概率都为 $p, 0<p<1$ ，若超过一半的参会人数投票支持该方案，则该方案获得通过.

（Ⅰ）求 5 位成员参加会议时方案通过的概率 $\widetilde{p}$;

（Ⅱ）当参会人数为 $2n+1$ 时，投票通过方案的概率比 $2n-1$ 位成员参加投票时通过方案的概率是否会增加，说明理由.

解：((Ⅰ) 当 5 位成员参加会议时，只有获得不少于 3 张支持票时方案得以通过，而恰有 3 张支持票的概率为 $C_5^3 p^3(1-p)^2$，恰有 4 张支持票的概率为 $C_5^4 p^4(1-p)$；全票支持的概率为 $C_5^5 p^5(1-p)^0$，因此，方案获得通过的概率为

$$\widetilde{p}=\sum_{i=3}^{5} C_5^i p^i (1-p)^{5-i}=(6p^2-15p+10)p^3 \quad .$$

（Ⅱ）对于一般的情形，设参加会议人数为 $2n+1$ 时 ，投票支持该方案通过的概率为 P_n ，为了使投票方案通过，前 $2n-1$ 个人中至少有 $n-1$ 个人投票支持方案.

若 $2n-1$ 位成员恰有 $n-1$ 个人投票支持方案，其概率为 $C_{2n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^n$ ，此时后两位人员必须同时投票支持方案，所以此时投票通过的概率为 $[C_{2n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^n]\times p^2$.

若 $2n-1$ 位成员恰有 n 个人投票支持方案，其概率为 $C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n-1}$ ，此时后两位人员至少有一个人投票支持方案即可，所以此时投票通过方案的概率为 $[C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n-1}]\times(1-(1-p)^2)$.

若 $2n-1$ 位成员至少有 $n+1$ 个人投票支持方案，其概率为 $P_{n-1}-C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n-1}$，

因此有

$$\begin{aligned}P_n=&[C_{2n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^n]\times p^2+[C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n-1}]\times(1-(1-p)^2)\\&+P_{n-1}-C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n-1}\end{aligned}$$

所以

$$P_n-P_{n-1}=C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n}(1-(1-p))=p^n(1-p)^n(2p-1)C_{2n-1}^{n} \text{，}$$

故当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，$P_{n-1}=P_n$ ，投票通过方案的概率不变；当 $0<p<\dfrac{1}{2}$ 时，$P_n<P_{n-1}$ ，投票通过方案的概率降低；当 $\dfrac{1}{2}<p<1$ 时，$P_n>P_{n-1}$，投票通过方案的概率增加.

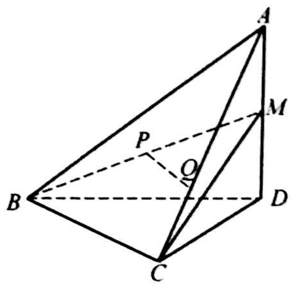
解法 2 直接得到

$P_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n-1}^{k}(1-p)^k p^{2n-1-k}$，利用 $C_{2n+1}^{k}=C_{2n-1}^{k}+2C_{2n-1}^{k-1}+C_{2n-1}^{k-2}$ ，也可以推得

$P_n-P_{n-1}=C_{2n-1}^{n}p^{n}(1-p)^{n}(1-(1-p))=p^n(1-p)^n(2p-1)C_{2n-1}^{n}$ 的结论.

13. 如图，在四面体 $A-BCD$ 中，$AD\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD, AD=2, BD=2\sqrt{2}$．$M$ 是 AD 的中点，P 是 BM 的中点，点 Q 在线段 AC 上，且 $AQ=3QC$．

（Ⅰ）证明：$PQ//$ 平面 BCD；（Ⅱ）若二面角 $C-BM-D$ 的大小为 60^0，求 $\angle BDC$ 的大小．



证明：（Ⅰ）方法一：如图 6，取 MD 的中点 F，且 M 是 AD 中点，所以 $AF=3FD$．因为 P 是 BM 中点，所以 $PF//BD$；又因为（Ⅰ）$AQ=3QC$ 且 $AF=3FD$，所以 $QF//BD$，所以面 $PQF//$ 面 BDC，且 $PQ\subset$ 面 BDC，所以 $PQ//$ 面 BDC；

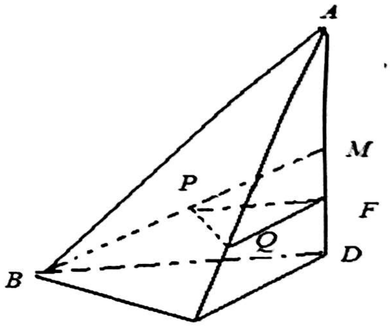


图6

方法二：如图 7 所示，取 BD 中点 O，且 P 是 BM 中点，所以 $PO\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}MD$；取 CD 的三等分点 H，使 $DH=3CH$，且 $AQ=3QC$，所以 $QH\underline{\underline{//}}\frac{1}{4}AD\underline{\underline{//}}\frac{1}{2}MD$，所以 $PO\underline{\underline{//}}QH\therefore PQ//OH$，且 $OH\subset BCD$，所以 $PQ//$ 面 BDC；

（Ⅱ）如图 8 所示，由已知得到面 $ADB\perp$ 面 BDC，过 C 作 $CG\perp BD$ 于 G，所以 $CG\perp BMD$，过 G 作 $GH\perp BM$ 于 H，连接 CH，所以 $\angle CHG$ 就是 $C-BM-D$ 的二面角；由已知得到 $BM=\sqrt{8+1}=3$，设 $\angle BDC=\alpha$，所以

$\frac{CD}{BD}=\cos\alpha, \sin\alpha=\frac{CG}{CD}=\frac{CB}{BD}\Rightarrow CD=2\sqrt{2}\cos\alpha, CG=2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha, BC=2\sqrt{2}\sin\alpha$,，

在 $RT\Delta BCG$ 中，$\angle BCG=\alpha\therefore\sin\alpha=\frac{BG}{BC}\therefore BG=2\sqrt{2}\sin^2\alpha$，所以在 $RT\Delta BHG$ 中，

$\frac{HG}{2\sqrt{2}\sin^2\alpha}=\frac{1}{3}\therefore HG=\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha}{3}$，所以在 $RT\Delta CHG$ 中

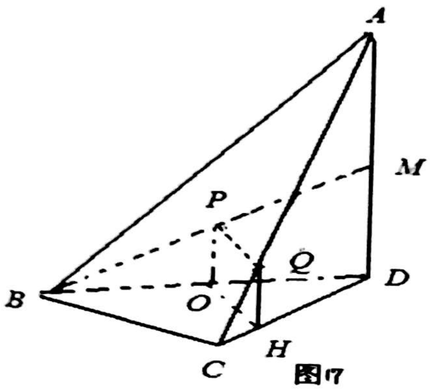


图7

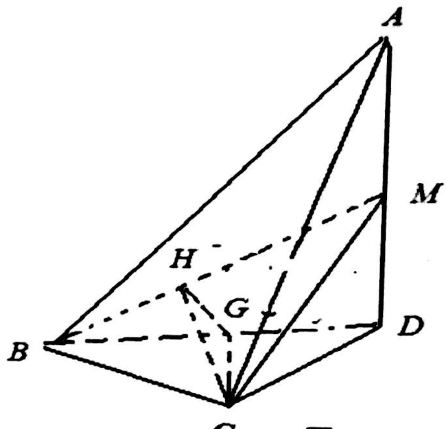


图 8

$$\tan\angle CHG=\tan 60^\circ=\sqrt{3}=\frac{CG}{HG}=\frac{2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha}{\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha}{3}}$$

$\therefore \tan\alpha=\sqrt{3}\ \therefore \alpha\in(0,90^\circ)\ \therefore \alpha=60^\circ\ \therefore \angle BDC=60^\circ$

14. 有一种风筝骨架的数学模型为:过抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 内一定点 $E\left(m,n\right)$ 作斜率分别为 k_1,k_2 的两条直线交抛物线于 A,B,C,D,且 M,N 分别为线段 AB,CD 的中点,连结 MN.

(Ⅰ)当 $n=0$,且 $k_1\cdot k_2=-1$ 时的模型称为“标准风筝骨架数学模型”,试求此时 ΔEMN 的面积的最小值.

(Ⅱ)若直线 MN 恒过一个定点,则称点为风筝骨架数学模型的一个“支点”. 试探究当 $k_1+k_2=1$ 时,是否具有“支点”?若有,请求出该支点的坐标,若没有请说明理由.

解:(1)设 AB 所在直线的方程为 $x=t_1\left(y-n\right)+m$,其中 $t_1=\dfrac{1}{k_1}$,代入 $y^2=2px$ 中,得 $y^2-2pt_1y+2pt_1n-2pm=0$.

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$,则有

$$y_1+y_2=2pt_1,\ x_1+x_2=t_1\left(y_1+y_2-2n\right)+2m=t_1\left(2pt_1-2n\right)+2m,\ 故\ M\left(pt_1{}^2-nt_1+m,pt_1\right).$$

再设 CD 所在直线的方程为 $x=t_2\left(y-n\right)+m$,其中 $t_2=\dfrac{1}{k_2}$,同理可得 $N\left(pt_2{}^2-nt_2+m,pt_2\right)$.

(Ⅰ)对于“标准风筝骨架数学模型”,由 $n=0$,得 $M\left(pt_1{}^2+m,pt_1\right)$,$N\left(pt_2{}^2+m,pt_2\right)$,$\left|EM\right|=\left|pt_1\right|\sqrt{1+t_1{}^2}$,$\left|EN\right|=\left|pt_2\right|\sqrt{1+t_2{}^2}$.

又 $k_1\cdot k_2=-1$,故 $t_1\cdot t_2=-1$,于是 ΔEMN 的面积

$$S=\frac{1}{2}\left|EM\right|\cdot\left|EN\right|=\frac{1}{2}\left|p^2t_1t_2\right|\sqrt{\left(1+t_1{}^2\right)\left(1+t_2{}^2\right)}=\frac{p^2}{2}\cdot\sqrt{2+t_1{}^2+t_2{}^2}\geq\frac{p^2}{2}\cdot\sqrt{4}=p^2.$$

当且仅当 $\left|t_1\right|=\left|t_2\right|=1$ 时等号成立. 所以,ΔEMN 的面积的最小值为 p^2.

(Ⅱ)由斜率公式,得 $k_{MN}=\dfrac{p\left(t_1-t_2\right)}{p\left(t_1{}^2-t_2{}^2\right)-n\left(t_1-t_2\right)}=\dfrac{1}{\left(t_1+t_2\right)-\dfrac{n}{p}}$.

故 MN 所在直线方程为 $y-pt_1=\dfrac{1}{\left(t_1+t_2\right)-\dfrac{n}{p}}\cdot\left[x-\left(pt_1{}^2-nt_1+m\right)\right]$,即 $y\left(t_1+t_2-\dfrac{n}{p}\right)-pt_1t_2=x-m$.

又 $k_1+k_2=\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}=1$,即 $t_1\cdot t_2=t_1+t_2$,代入上式,得 $\left(t_1+t_2\right)\left(y-p\right)=x+\dfrac{ny}{p}-m$.

所以,当 $y=p$,$x=m-n$,即直线 MN 恒过定点 $\left(m-n,p\right)$,即风筝骨架数学模型具有“支点”,坐标为 $\left(m-n,p\right)$.

15. 在ΔABC中，

（Ⅰ）求证：$\sin A+\sin B\leq 2\cos\dfrac{C}{2}$.

（Ⅱ）求$\sin A+\sin B+\sqrt{3}\sin C$取得最大值.

解：$\sin A+\sin B+\sqrt{3}\sin C=\sin A+\sin(A+C)+\sqrt{3}\sin C$

$$=\sin A+\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sqrt{3}\sin C$$

$$=\sin A(1+\cos C)+\cos A\sin C+\sqrt{3}\sin C$$

由柯西不等式有

$$\sin A(1+\cos C)+\cos A\sin C\leqslant\sqrt{(\sin^2 A+\cos^2 A)[(1+\cos C)^2+\sin^2 C]}$$

$$=\sqrt{2+2\cos C}=2\cos\frac{C}{2},$$

当且仅当$\dfrac{\sin A}{1+\cos C}=\dfrac{\cos A}{\sin C}$，即$\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{1+\cos C}{\sin C}$，亦即$\tan A=\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}$时，即$A+\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

时，“=”成立.

所以$\sin A+\sin B+\sqrt{3}\sin C\leqslant 2\cos\dfrac{C}{2}+\sqrt{3}\sin C$.

令$f(C)=2\cos\dfrac{C}{2}+\sqrt{3}\sin C$，$0<C<\pi$，则

$$f'(C)=-\sin\frac{C}{2}+\sqrt{3}\cos C=-\sin\frac{C}{2}+\sqrt{3}(1-2\sin^2\frac{C}{2})$$

$$=-2\sqrt{3}\sin^2\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}+\sqrt{3}.$$

令$f'(C)=0$，则$\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（$\sin\dfrac{C}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$舍去）. 记满足$\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$的角$C$为$C'$，则当$0<C<C'$时，$f'(C)>0$，$f(C)$单调递增；当$C'<C<\pi$时，$f'(C)<0$，$f(C)$单调递减. 所以当角$C$为$C'$时，$f(C)$取得最大值.

当$\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，$\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin C=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

$2\cos\dfrac{C}{2}+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

综上所述，$\sin A+\sin B+\sqrt{3}\sin C$的最大值为$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

16. 设 $a>0, a\neq 1$ ，函数 $f(x)=a^x-x^a(x>0)$.

（Ⅰ）若上述函数只有一个零点，求 a 的取值范围；

（Ⅱ）若上述函数有两个零点 x_1,x_2 ，证明： $x_1+x_2>2e$.

解：（1）设 $f(x)=a^x-x^a=0$，则它等价于 $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln a}{a}$ ，该等式等价于直线 $y=\dfrac{\ln a}{a}$ 与函数 $F(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 有两个交点，注意到 $F'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$ 解得 $x=e$ ，即 $\max\limits_{x>0}F(x)=F(e)=\dfrac{1}{e}$ ，在区间 $(0,e)$ 上函数 $F(x)$ 从 $-\infty$ 递增到 $F(x)=0$ 再递增到 $F(e)=\dfrac{1}{e}$ ；在区间 $(e,+\infty)$ 上，函数 $F(x)$ 从 $\dfrac{1}{e}$ 单调递减趋近于 0 ，且 x 轴为其渐进线．故当 $0<a<1$ 时，$\dfrac{\ln a}{a}<0$ ，利用函数 $F(x)$ 的单调性知直线 $y=\dfrac{\ln a}{a}$ 与函数 $F(x)$ 仅有一个交点．

（2）设两个零点分别为 x_1,x_2 ，设 $x_1<x_2$，由题设有 $1<x_1<e<x_2$ ，于是 $2e-x_1=e+(e-x_1)>e$ ，因此，要证明 $x_1+x_2>2e$，等价于 $x_2>2e-x_1>e$ ，由于函数 $F(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $(e,+\infty)$ 单调递减，故只需证明 $\dfrac{\ln a}{a}=F(x_2)<F(2e-x_1)$ 即可．

由于 x_1,x_2 中有一个为 a ，若 $x_1=a<e$ ，则等价于证明

$$\frac{\ln a}{a}<\frac{\ln(2e-a)}{2e-a}(a<e)\ .$$

构造函数 $g(x)=(2e-x)\ln x-x\ln(2e-x)\quad(1<x<e)$ ，由于

$g'(x)=\dfrac{2e-x}{x}+\dfrac{x}{2e-x}-\ln x-\ln(2e-x)$ ，当 $1<x<e$ 时，

$-\ln x(2e-x)>-\ln e(2e-e)=-2$ ，而 $\dfrac{2e-x}{x}+\dfrac{x}{2e-x}>2$，因此有

$g'(x)>0(1<x<e)$ 成立．注意到 $g(1)=-\ln(2e-1)<0, g(e)=0$ ，这说明，当 $1<x<e$ 时，恒有 $g(x)<0$ ，故有 $\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{\ln(2e-a)}{2e-a}(a<e)$ 成立，从而有 $x_1+x_2>2e$ 成立．

当 $x_2=a>e$ 时，则有 $2e-a<e<a$ ，与上述讨论完全类似可以得到 $x_1+x_2>2e$ 成立．